

# Algèbres différentielles de formes quasi-Jacobi d'indice nul

FRANÇOIS DUMAS, FRANÇOIS MARTIN ET EMMANUEL ROYER

**RÉSUMÉ.** La notion de double profondeur attachée aux formes quasi-Jacobi permet de distinguer dans l'algèbre  $JS^\infty$  des formes singulières quasi-Jacobi d'indice nul certaines sous-algèbres significatives (formes de type modulaire, formes de type elliptique, formes de Jacobi). On étudie la stabilité de ces sous-algèbres par les dérivations de  $JS^\infty$  et par certaines suites d'opérateurs bidifférentiels constituant des analogues de crochets de Rankin-Cohen ou de transvectants.

**ABSTRACT.** The notion of double depth associated with quasi-Jacobi forms allows distinguishing, within the algebra  $JS^\infty$  of quasi-Jacobi singular forms of index zero, certain significant subalgebras (modular-type forms, elliptic-type forms, Jacobi forms). We study the stability of these subalgebras under the derivations of  $JS^\infty$  and through certain sequences of bidifferential operators constituting analogs of Rankin-Cohen brackets or transvectants.

An english translation of this text is available at <https://hal.science/hal-04735930>.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Formes de Jacobi singulières	3
2.1. Fonctions elliptiques associées à un réseau	3
2.2. Formes elliptiques	4
2.3. Formes de Jacobi singulières d'indice nul	5
2.3.1. Action du groupe de Jacobi sur $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$ et sur $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$	5
2.3.2. Définition et exemples fondamentaux	6
Cas du poids pair	8
Cas du poids impair	9
2.3.3. Dimension des espaces $JS_k$	9
2.3.4. Application à l'équation différentielle de la fonction de Weierstraß	11
3. Formes singulières quasi-Jacobi d'indice nul	11
3.1. Action et dérivations	11
3.2. Définition	12
3.3. Stabilité par dérivation	13
3.4. Exemples fondamentaux	14
3.4.1. Formes quasimodulaires	14
3.4.2. La première fonction d'Eisenstein décalée	14
3.5. Structure	15
3.6. Sous-algèbres remarquables	16

---

*Date:* 24 mars 2025, 22 h 17 CET.

*2020 Mathematics Subject Classification.* Primaire : 11F50, 16S80 Secondaire : 11F11, 11F25, 16W25, 53D55.

*Mots-clés.* Formes elliptiques, formes de Jacobi, déformations formelles, crochets de Rankin-Cohen.

Les travaux des deux derniers auteurs sont partiellement financés par le projet ANR-23-CE40-0006-01 Gaec. Le troisième auteur a bénéficié de précieux échanges avec Yuk-kam Lau et Ben Kane lors de visites à l'*Institute of Mathematical Research* de Hong Kong University permises par le projet Hubert Curien Procure n° 48166WK. Il remercie Timothy Browning de l'*Institute of Science and Technology Austria* pour son accueil. Dans le but d'une publication en libre accès, cette version du texte est distribuée sous licence CC-BY.

3.6.1. Formes quasi-Jacobi de type quasielliptique	16
3.6.2. Formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire	17
3.7. Équations différentielles fondamentales	17
3.7.1. Dérivée d'Oberdieck	17
3.7.2. Applications	18
4. Crochets de Rankin-Cohen et déformations formelles	19
4.1. Crochets de Rankin-Cohen des formes quasi-Jacobi de type quasielliptique	20
4.2. Crochets de Rankin-Cohen des formes de Jacobi singulières	21
4.3. Transvectants des formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire	22
Annexe A. Stabilité des différentes algèbres par les différents crochets	25
Annexe B. Dimensions des sous espaces des formes quasi-Jacobi d'indice nul	26
Références	27

## 1. INTRODUCTION

Cet article propose une étude analytique et algébrique des formes singulières quasi-Jacobi d'indice nul. Il étudie en particulier la stabilité par dérivations de certaines sous-algèbres significatives (formes elliptiques, formes quasi-Jacobi de type quasielliptique, formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire), avec l'objectif de construire des suites d'opérateurs bidifférentiels constituant des déformations formelles de ces algèbres, crochets de Rankin-Cohen ou transvectants.

Pour les actions (paramétrées par un entier positif, le poids) du groupe modulaire  $SL(2, \mathbb{Z})$  sur l'algèbre des fonctions d'une variable complexe  $\tau$  du demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , il est bien connu que l'algèbre  $M$  des formes modulaires (graduée par le poids) n'est pas stable par la dérivation  $\partial_\tau$ . Il y a au moins deux voies pour lever cette obstruction. La première est de construire de façon canonique une suite d'opérateurs bidifférentiels en  $\partial_\tau$  dits crochets de Rankin-Cohen qui stabilisent  $M$  (cf. [26]) et qui constituent de plus (cf. [2], [6] et [26]) une déformation formelle de l'algèbre  $M$  (au sens de [12, Chapter 13]). La seconde est de définir au-dessus de  $M$  l'algèbre  $M^\infty$  des formes quasimodulaires qui est par construction stable par  $\partial_\tau$ , graduée par le poids et filtrée par la profondeur (cf. [26], [18]). Ces deux points de vue sont étroitement liés puisqu'une méthode pour montrer la stabilité de  $M$  par les crochets de Rankin-Cohen passe par un prolongement de leur définition à l'algèbre  $M^\infty$  (voir [25, Section 5], ou [6, Proposition 9]). C'est une démarche comparable qui est proposée dans cet article pour l'action du groupe de Jacobi sur des fonctions en deux variables. Elle nécessite de reprendre dans un contexte formalisé et unifié diverses notions dispersées dans la littérature sur les formes de Jacobi et formes quasi-Jacobi (voir par exemple [22], [13], [7], [8]).

Dans ce qui suit on considère les actions (paramétrées par deux entiers positifs, le poids et l'indice) du groupe de Jacobi  $SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  sur les fonctions de deux variables complexes  $(\tau, z)$  de  $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . La notion de forme de Jacobi singulière s'en déduit (définition 6), le terme singulier faisant ici référence aux hypothèses analytiques de périodicité et de méromorphie nécessaires que nous explicitons pour plus de clarté à la définition 4. En notant  $JS_k$  l'espace vectoriel des formes de Jacobi singulières d'indice nul et de poids  $k$ , le théorème 8 décrit l'algèbre graduée  $JS = \bigoplus JS_k$  comme l'algèbre des polynômes  $\mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4]$  où  $\wp$  est la fonction de Weierstraß et  $e_4$  la série d'Eisenstein de poids 4. Elle coïncide donc avec l'algèbre des formes elliptiques au sens de la définition 1. La fin de la première section de l'article est consacrée à la détermination (proposition 9) de la dimension des sous-espaces  $JS_k$ .

L'algèbre  $JS$ , comme sa sous-algèbre  $M$ , n'est pas stable par la dérivation  $\partial_\tau$ . Ceci conduit à introduire dans la section 2 la notion de forme quasi-Jacobi singulière d'indice nul, à laquelle sont attachés par construction un poids  $k \in \mathbb{N}$  et une double profondeur  $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$  (voir

définition 13). Ces formes quasi-Jacobi singulières se structurent en une algèbre  $JS^\infty$  graduée par le poids et doublement filtrée par la profondeur, que le théorème 23 décrit comme l'algèbre de polynômes en cinq variables  $JS^\infty = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, e_2, E_1]$  où  $e_2$  est la série d'Eisenstein de poids 2 et profondeur (1, 0) et  $E_1$  la première fonction d'Eisenstein décalée de poids 1 et profondeur (0, 1). Les deux sous-algèbres  $JS^{\infty,0} = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, e_2]$  et  $JS^{0,\infty} = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1]$  intermédiaires entre JS et  $JS^\infty$  correspondent aux formes quasi-Jacobi de profondeur  $(s_1, 0)$  et  $(0, s_2)$ , respectivement dénommées de type quasimodulaire et de type quasielliptique.

La section 3 de l'article est consacrée à la construction de déformations formelles sur chacune des quatre algèbres en jeu, et leurs liens avec les crochets de Rankin-Cohen classiques sur la sous-algèbre M. La dérivation  $\partial_\tau$  de  $JS^\infty$  étant homogène de degré 2 pour le poids, on peut introduire à la proposition 30 des crochets de Rankin-Cohen sur  $JS^\infty$  qui constituent une déformation formelle de  $JS^\infty$  (voir [2] et [6], suivant le principe initié en [25]). En utilisant les arguments algébriques généraux de [6, *Theorem 6*], on démontre au théorème 31 que la sous-algèbre  $JS^{0,\infty}$  est stable par ces crochets qui prolongent ceux classiquement définis sur M. La même méthode permet d'obtenir au théorème 35 une déformation formelle de l'algèbre JS des formes elliptiques prolongeant les crochets de Rankin-Cohen sur M en considérant cette fois des opérateurs bidifférentiels en la dérivation  $d = \partial_\tau + \frac{1}{4} E_1 \partial_z$  (voir aussi avec une preuve différente [13, *Proposition 2.15*]). Pour le cas des formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire, c'est par une stratégie très différente basée sur la notion de transvectants issue de la théorie classique des invariants (voir [17]) que l'on obtient au théorème 47 une déformation formelle de l'algèbre  $JS^{\infty,0}$ .

## 2. FORMES DE JACOBI SINGULIÈRES

**2.1. Fonctions elliptiques associées à un réseau.** [9, *Chapter V*] Soit  $\mathcal{R}$  un réseau de  $\mathbb{C}$ . Une fonction  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  méromorphe est dite *elliptique pour  $\mathcal{R}$*  si

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall w \in \mathcal{R} \quad f(z+w) = f(z).$$

Un exemple fondamental de telle fonction est la fonction de Weierstraß associée au réseau  $\mathcal{R}$  définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathcal{R} \quad \wp_{\mathcal{R}}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \mathcal{R} - \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Toute fonction elliptique paire est une fraction rationnelle à coefficients complexes en  $\wp_{\mathcal{R}}$  [9, *Proposition V.3.2*]. Pour tout entier  $k \geq 4$  pair, on définit le nombre complexe

$$e_{k,\mathcal{R}} = \sum_{w \in \mathcal{R} - \{0\}} w^{-k}.$$

La fonction  $\wp_{\mathcal{R}}$  vérifie l'équation différentielle

$$\left( \wp'_{\mathcal{R}} \right)^2 = W_{\mathcal{R}}(\wp_{\mathcal{R}}) \quad \text{avec} \quad W_{\mathcal{R}}(X) = 4(X^3 - 15e_{4,\mathcal{R}}X - 35e_{6,\mathcal{R}}) \in \mathbb{C}[X]. \quad (1)$$

Si  $P_1, Q_1, P_2$  et  $Q_2$  sont des fractions rationnelles, on a alors

$$\left( P_1(\wp_{\mathcal{R}}) + Q_1(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}} \right) \left( P_2(\wp_{\mathcal{R}}) + Q_2(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}} \right) = \left( P_3(\wp_{\mathcal{R}}) + Q_3(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}} \right)$$

avec

$$P_3 = P_1P_2 + W_{\mathcal{R}}Q_1Q_2 \quad \text{et} \quad Q_3 = P_1Q_2 + Q_1P_2.$$

En particulier, si  $P$  et  $Q$  sont deux fractions rationnelles de  $\mathbb{C}(X)$  et si

$$\tilde{P} = \frac{P}{P^2 - W_{\mathcal{R}}Q^2} \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = -\frac{Q}{P^2 - W_{\mathcal{R}}Q^2}.$$

alors

$$(P(\wp_{\mathcal{R}}) + Q(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}})(\tilde{P}(\wp_{\mathcal{R}}) + \tilde{Q}(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}}) = 1.$$

Ainsi, l'ensemble

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \mathbb{C}(\wp_{\mathcal{R}}) \oplus \mathbb{C}(\wp_{\mathcal{R}})\wp'_{\mathcal{R}}$$

est un corps. Puisque  $\mathbb{C}(\wp_{\mathcal{R}})$  est le corps des fonctions elliptiques paires, et puisque si  $f$  est elliptique et impaire, alors le quotient  $f/\wp'_{\mathcal{R}}$  est elliptique et paire, on conclut que le corps  $\mathcal{E}(\mathcal{R})$  est l'ensemble des fonctions elliptiques pour  $\mathcal{R}$ .

**2.2. Formes elliptiques.** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , on a

$$\wp_{\lambda\mathcal{R}}(z) = \lambda^{-2}\wp_{\mathcal{R}}(\lambda^{-1}z) \quad (2)$$

$$e_{k,\lambda\mathcal{R}} = \lambda^{-k}e_{k,\mathcal{R}} \quad (3)$$

de sorte que l'on peut se restreindre aux représentants des classes d'équivalences de réseaux par homothétie complexe. Tout réseau ayant une base  $(w_1, w_2)$  avec  $w_2/w_1$  appartenant au demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H}$  des complexes de partie imaginaire strictement positive, on se restreint aux réseaux  $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$  avec  $\tau \in \mathcal{H}$ .

On définit alors pour tout entier  $k \geq 4$  pair la fonction d'Eisenstein de poids  $k$  par

$$e_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ \tau \mapsto e_{k,\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}}.$$

C'est une forme modulaire de poids  $k$  sur  $SL(2, \mathbb{Z})$  dont le développement de Fourier<sup>1</sup> est

$$e_k(\tau) = \frac{2^k |B_k|}{k!} \pi^k \left( 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2i\pi n\tau} \right) \quad (k \geq 4 \text{ pair}). \quad (4)$$

On définit  $e_2$  en étendant cette égalité à  $k = 2$ . La fonction  $e_2$  n'est pas une forme modulaire.

De la même façon on définit la fonction de Weierstraß par

$$\wp : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ (\tau, z) \mapsto \wp_{\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}}(z).$$

**Définition 1.** On appelle *forme elliptique* tout élément de l'anneau  $\mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4]$  et *fonction elliptique* tout élément du corps de fractions  $\mathbb{C}(\wp, \partial_z \wp, e_4)$ .

*Remarque 2.* On notera aussi  $e_k$  la fonction de deux variables induite par la fonction d'Eisenstein de poids  $k$  et on l'appellera encore fonction d'Eisenstein de poids  $k$  :

$$e_k : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ (\tau, z) \mapsto e_k(\tau) \quad (k \geq 2 \text{ pair}). \quad (5)$$

*Remarque 3.* Notre utilisation du terme *elliptique* fait référence à la théorie des fonctions elliptiques associées à un réseau fixe, décrites à l'aide de la fonction de Weierstraß associée au réseau et de sa dérivée. La volonté de « libérer » le réseau impose que nous ajoutions  $e_4$  et  $e_6$ . L'équation différentielle

$$(\partial_z \wp)^2 - 4\wp^3 + 60e_4\wp + 140e_6 = 0 \quad (6)$$

impose ensuite de retirer la fonction  $e_6$  des générateurs : elle est en effet polynomiale en les fonctions algébriquement indépendantes  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$  et  $e_4$  (voir le théorème 8). On redémontrera (6) indépendamment plus loin dans ce texte (voir l'équation (31)).

1. L'entier  $\sigma_{k-1}(n)$  est  $\sum_{d|n} d^{k-1}$ . La suite  $(B_n)_{n \geq 0}$  est définie par la série génératrice :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

### 2.3. Formes de Jacobi singulières d'indice nul.

2.3.1. *Action du groupe de Jacobi sur  $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$ .* Le groupe multiplicatif  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  agit à droite sur le groupe additif  $H = \mathbb{Z}^2$  par

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \forall \Lambda = (\lambda, \mu) \in H, \Lambda g = (\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d)$$

Le groupe de Jacobi est le produit semi-direct  $G \ltimes H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  qui s'en déduit, avec le produit

$$\forall g, g' \in G, \forall \Lambda, \Lambda' \in H, (g, \Lambda)(g', \Lambda') = (gg', \Lambda g' + \Lambda').$$

Les groupes  $G$  et  $H$  agissent à gauche sur  $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \forall (\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}, g(\tau, z) &= \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d} \right), \\ \forall \Lambda = (\lambda, \mu) \in H, \forall (\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}, \Lambda(\tau, z) &= (\tau, z + \lambda\tau + \mu). \end{aligned}$$

On en déduit une action à droite  $|_G$  de  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  et une action à droite  $|_H$  de  $H = \mathbb{Z}^2$  sur l'algèbre de fonctions  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  définies par

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \forall f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}, f|_G : (\tau, z) \mapsto f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) \quad (7)$$

$$\forall \Lambda = (\lambda, \mu) \in H, \forall f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}, f|_H : (\tau, z) \mapsto f(\tau, z + \lambda\tau + \mu). \quad (8)$$

Ces deux actions sont compatibles au sens où

$$\forall g \in G, \forall \Lambda \in H, \forall f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}, (f|_G)|_H \Lambda g = (f|_H \Lambda)|_G g.$$

Ceci permet d'en déduire une action à droite du groupe de Jacobi  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  sur l'algèbre de fonctions  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  :

$$\forall g \in G, \forall \Lambda \in H, \forall f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}, f|_{G \ltimes H}(g, \Lambda) = (f|_G)|_H \Lambda. \quad (9)$$

En d'autres termes, pour tout  $(\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$

$$f|_{G \ltimes H} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \right) (\tau, z) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d}\right). \quad (10)$$

Plus généralement si  $\nu$  est une application de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$ , alors l'application

$$(f, (g, \Lambda)) \mapsto \nu(g, \Lambda) (f|_{G \ltimes H}(g, \Lambda)) \quad (11)$$

définit une action à droite du groupe de Jacobi sur l'algèbre  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  si et seulement si  $\nu$  est un 1-cocycle pour l'action (9), c'est-à-dire vérifie

$$\nu((g, \Lambda)(g', \Lambda')) = (\nu(g, \Lambda)|_{G \ltimes H}(g', \Lambda')) \nu(g', \Lambda'). \quad (12)$$

Un tel 1-cocycle  $\nu$  peut être obtenu à partir d'un 1-cocycle  $\nu_G$  pour l'action (7) de  $G$  et d'un 1-cocycle  $\nu_H$  pour l'action (8) de  $H$  en posant

$$\forall (g, \Lambda) \in G \ltimes H, \nu(g, \Lambda) = (\nu_G(g)|_H \Lambda) \nu_H(\Lambda) \quad (13)$$

qui vérifie la relation (12) si et seulement si on a la condition de compatibilité

$$\forall (g, \Lambda) \in G \ltimes H, (\nu_G(g)|_H \Lambda g) \nu_H(\Lambda g) = \nu_G(g) (\nu_H(\Lambda)|_G g). \quad (14)$$

Soit  $j: \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  et  $\ell: \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  définies pour  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $(\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$  par

$$j(g)(\tau, z) = c\tau + d, \quad \ell(g)(\tau, z) = e\left(-\frac{cz^2}{c\tau + d}\right)$$

où  $e: \xi \mapsto \exp(2i\pi\xi)$ . Ce sont des 1-cocycles de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  dans  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$ . Pour tous entiers positifs  $k$  et  $m$ , l'application  $j^k \ell^m$  en est donc un aussi.

Soit  $p: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  définie pour  $\Lambda = (\lambda, \mu)$  et  $(\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$  par

$$p(\Lambda)(\tau, z) = e(\lambda^2 \tau + 2\lambda z).$$

C'est un 1-cocycle de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$ . Pour tout entier positif  $m'$ , l'application  $p^{m'}$  en est donc un aussi.

Suivant la construction de (13), considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \nu_{k,m,m'} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}} \\ (g, \Lambda) &\mapsto ((j^k \ell^m)(g)|_{\mathbb{Z}^2} \Lambda) p^{m'}(\Lambda). \end{aligned}$$

La condition de compatibilité (14) est satisfaite si et seulement si  $m' = m$  et on en déduit que  $\nu_{k,m,m} = \nu_{k,m}$  est un 1-cocycle pour l'action (11) de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ .

Finalement, si  $k$  et  $m$  sont des entiers positifs, on définit une action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{C}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}$  en posant

$$(f|_{k,m} A)(\tau, z) = (c\tau + d)^{-k} e^m \left( -\frac{c(z + \lambda\tau + \mu)^2}{c\tau + d} + \lambda^2 \tau + 2\lambda z \right) f \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d} \right) \quad (15)$$

pour tout  $A = (g, \Lambda) = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ , avec  $e^m(\xi) = \exp(2im\pi\xi)$ .

### 2.3.2. Définition et exemples fondamentaux.

**Définition 4.** Une fonction  $f: \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est *singulière* si :

- pour tout  $\tau \in \mathcal{H}$ , la fonction  $z \mapsto f(\tau, z)$  est 1-périodique, méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et telle que ses seuls pôles sont les points du réseau  $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ , tous de même ordre, cet ordre étant de plus indépendant de  $\tau$ ;
- la fonction  $\tau \mapsto f(\tau, z)$  est 1-périodique;
- les coefficients de Laurent de  $z \mapsto f(\tau, z)$  en 0 sont des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$  et en l'infini.

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions singulières.

*Remarque 5.* Expliciteons la troisième condition : notons  $A_n$  la fonction  $n$ -ième coefficient de Laurent de  $z \mapsto f(\tau, z)$  en 0. Par la deuxième condition, les fonctions  $A_n$  sont 1-périodiques. On demande donc qu'elles soient holomorphes sur  $\mathcal{H}$  et admettent un développement de Fourier de la forme

$$A_n(\tau) = \sum_{r=0}^{+\infty} \widehat{A}_n(r) e(r\tau).$$

**Définition 6.** Soit  $k$  et  $m$  des entiers positifs. Une fonction singulière  $f: \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une *forme de Jacobi singulière*<sup>2</sup> d'indice  $m$  et de poids  $k$  si elle vérifie  $f|_{k,m} A = f$  pour tout  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ .

De façon explicite, une fonction singulière est une forme de Jacobi singulière d'indice  $m$  et de poids  $k$  si et seulement si elle vérifie les deux relations suivantes :

- pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$f(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2i\pi m(\lambda^2 \tau + 2\lambda z)} f(\tau, z); \quad (16)$$

- pour toute  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ,

$$f \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d} \right) = e^{2i\pi m c z^2 / (c\tau + d)} (c\tau + d)^k f(\tau, z); \quad (17)$$

2. La définition de forme de Jacobi méromorphe ne semble pas fixée. On s'inspire ici de [16, § 3.2].

*Remarque 7.* Après circulation d'une première version de ce travail, Jan-Willem M. van Ittersum nous a informé de son article [23] dans lequel il introduit la notion de *forme de Jacobi strictement méromorphe*. Nous proposons une autre présentation d'un cas particulier de la sienne et, en particulier nous insistons sur le contexte analytique en évitant la notion de forme méromorphe à plusieurs variables.

On fixe une matrice  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $SL(2, \mathbb{Z})$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ . On a

$$\wp\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = \wp_{\mathbb{Z} \oplus \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \mathbb{Z}}\left(\frac{z}{c\tau + d}\right).$$

Or,  $\mathbb{Z} \oplus \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \mathbb{Z} = \frac{1}{c\tau + d} (\mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z})$ , l'égalité (2) implique alors

$$\wp_{\mathbb{Z} \oplus \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \mathbb{Z}}\left(\frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 \wp_{\mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z}}(z)$$

c'est-à-dire

$$\wp\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 \wp(\tau, z). \quad (18)$$

D'autre part, par définition des fonctions elliptiques

$$\wp(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = \wp(\tau, z). \quad (19)$$

Notons  $\partial_z = d/dz$ . En dérivant (18) et (19), on trouve

$$(\partial_z \wp)\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^3 \partial_z \wp(\tau, z). \quad (20)$$

et

$$(\partial_z \wp)(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = \partial_z \wp(\tau, z). \quad (21)$$

Avec la convention faite dans la remarque 2, la fonction  $e_4$  satisfait l'équation

$$e_4\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 e_4(\tau, z). \quad (22)$$

Le développement de Laurent de  $\wp$  est donné par

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) e_{2n+2}(\tau) z^{2n} \quad (23)$$

[9, Proposition V.2.5], ce qui montre que  $\wp$  (et donc  $\partial_z \wp$ ) sont singulières.

Les relations (18) à (23) montrent donc que  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$  et  $e_4$  sont des formes de Jacobi singulières d'indice nul et de poids respectifs 2, 3 et 4. La suite de cette section a pour objectif de clarifier le cadre analytique de la Proposition 2.8 de [13]. C'est une nouvelle réponse à l'objectif semblable suivi par [23, Proposition 2.7].

**Théorème 8.** (1) Les fonctions  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$  et  $e_4$  sont algébriquement indépendantes.

(2) L'algèbre des formes elliptiques est graduée par le poids. On note  $JS = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} JS_k$

où  $JS_k$  est l'ensemble des éléments  $\sum_{\substack{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \\ 2a+3b+4c=k}} \alpha(a,b,c) \wp^a (\partial_z \wp)^b e_4^c$  avec  $\alpha(a,b,c) \in \mathbb{C}$ .

(3) Pour tout  $k \geq 0$ ,  $JS_k$  est l'ensemble des formes de Jacobi singulières d'indice nul et de poids  $k$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord l'indépendance algébrique de  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$  et  $e_4$ . On a, pour tout  $\tau \in \mathcal{H}$ ,  $\partial_z \wp\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right) = 0$  d'après [9, Lemma V.2.8]. Grâce à (6), on a entre les fonctions  $e_4$ ,  $e_6$  et  $\tilde{\wp}$ :  $\tau \mapsto \wp(\tau, \tau/2)$  une relation de dépendance algébrique :

$$\tilde{\wp}^3 - 15e_4\tilde{\wp} - 35e_6 = 0.$$

Puisque  $e_4$  et  $e_6$  sont algébriquement indépendantes on en déduit que les fonctions  $e_4$  et  $\tilde{\wp}$  sont algébriquement indépendantes. Supposons alors  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$  et  $e_4$  algébriquement dépendantes. Il existerait un entier  $N \geq 1$  et une suite non nulle de complexes  $\alpha_{k,\ell}^{(i)}$  tels que

$$\sum_{i=0}^N f_i (\partial_z \wp)^i = 0 \quad \text{avec} \quad f_i = \sum_{k,\ell} \alpha_{k,\ell}^{(i)} e_4^\ell \wp^k.$$

En spécialisant cette égalité à  $z = \tau/2$ , on montre que  $\tau \mapsto f_0\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right)$  est nulle, d'où, par récurrence, tous les  $\tau \mapsto f_i\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right)$  sont nuls. Par indépendance algébrique de  $e_4$  et  $\tilde{\wp}$  il en résulte que tous les  $\alpha_{k,\ell}^{(i)}$  sont nuls d'où une contradiction. Cela démontre le point (1). Le point (2) en découle grâce à la définition 1.

Montrons (3). Grâce à (17) appliquée à  $(a, b, c, d) = (-1, 0, 0, -1)$ , toute forme de Jacobi singulière d'indice nul et de poids  $k$  est paire en la variable  $z$  si  $k$  est pair et impaire en la variable  $z$  si  $k$  est impair.

Soit  $f$  une forme de Jacobi singulière d'indice nul et de poids  $k$ . Pour tout  $\tau$ , la fonction  $z \mapsto f(\tau, z)$  est une fonction elliptique associée au réseau  $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$  dont les pôles sont des points du réseau. Dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ , cette fonction a donc au plus un pôle (qui peut être multiple) et celui-ci est en 0.

*Cas du poids pair.* Si  $k$  est pair, pour tout  $\tau$  il existe  $P_\tau \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$f(\tau, z) = P_\tau(\wp(\tau, z))$$

et le degré  $n_0$  de  $P_\tau$  est la moitié de l'ordre du pôle de  $z \mapsto f(\tau, z)$  en 0 [9, Proposition V.3.1]. Il est donc indépendant de  $\tau$  et il existe des fonctions  $a_0, \dots, a_{n_0}$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$f(\tau, z) = \sum_{j=0}^{n_0} a_j(\tau) \wp(\tau, z)^j. \quad (24)$$

Compte-tenu de (17) et (18), on a

$$\sum_{j=0}^{n_0} (c\tau + d)^{2j} a_j \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) \wp(\tau, z)^j = \sum_{j=0}^{n_0} (c\tau + d)^k a_j(\tau) \wp(\tau, z)^j.$$

La famille  $(\wp_{\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}}^j)_{j \in \mathbb{N}}$  est linéairement indépendante. On en déduit que chaque  $a_j$  est une fonction faiblement modulaire<sup>3</sup> de poids  $k - 2j$ .

Montrons que les  $a_j$  sont holomorphes sur  $\mathcal{H}$  et en l'infini. L'égalité entre le développement de Laurent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\tau) z^{2n-2n_0}$$

3. Au sens de [19], c'est-à-dire méromorphe sur le demi-plan de Poincaré et vérifiant les relations de modularité.

de  $z \mapsto f(\tau, z)$  en 0 et l'égalité (24) conduit grâce à (23) à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\tau) z^{2n} = \sum_{j=0}^{n_0} a_j(\tau) \left( \sum_{r=0}^{+\infty} \epsilon_r(\tau) z^{2r} \right)^j z^{2n_0-2j}$$

les fonctions  $\epsilon_r$  holomorphes sur  $\mathcal{H}$  étant définies par  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_1 = 0$  et  $\epsilon_r = (2r-1)\epsilon_{2r}$  si  $r \geq 2$ . On en déduit

$$A_r = a_{n_0-r} + \sum_{j=n_0-r+1}^{n_0} a_j \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_j=r+j-n_0} \epsilon_{\alpha_1} \cdots \epsilon_{\alpha_j}.$$

Par récurrence, on obtient que les fonctions  $a_j$  sont holomorphes sur  $\mathcal{H}$  et en l'infini.

Finalement, les fonctions  $a_j$  sont des formes modulaires donc des éléments de  $\mathbb{C}[e_4, e_6]$ . Ainsi, une forme de Jacobi singulière d'indice nul et de poids pair est un élément de  $\mathbb{C}[e_4, e_6, \wp] \subset \mathbb{C}[e_4, \wp, (\partial_z \wp)^2] \subset \mathbb{C}[e_4, \wp, \partial_z \wp]$ .

*Cas du poids impair.* Si  $k$  est impair, alors  $f \partial_z \wp$  est une forme de Jacobi singulière d'indice nul et de poids pair  $k+3$ . On en déduit que  $f \partial_z \wp \in \mathbb{C}[e_4, \wp, (\partial_z \wp)^2]$  puis qu'il existe des polynômes  $P$  et  $Q$  tels que

$$f = \frac{1}{\partial_z \wp} P(e_4, \wp) + Q(e_4, \wp, (\partial_z \wp)^2) \partial_z \wp.$$

Pour tout  $\tau \in \mathcal{H}$ ,  $z \mapsto f(\tau, z)$  n'a pas de pôle en  $z = \tau/2$ , donc

$$P(e_4, \tilde{\wp}) = 0.$$

Par indépendance algébrique de  $e_4$  et  $\tilde{\wp}$ , le polynôme  $P$  est nul. Ainsi  $f \in \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4]$ .  $\square$

2.3.3. *Dimension des espaces JS<sub>k</sub>.* Pour tout entier  $k \geq 0$ , une base de l'espace JS<sub>k</sub> est

$$\{\wp^a (\partial_z \wp)^b e_4^c : (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, 2a + 3b + 4c = k\}. \quad (25)$$

L'équation  $2a + 3b + 4c = k$  équivaut à l'équation  $4a + 6b = 2k - 8c$  et puisque l'algèbre  $\mathbb{C}[e_4, e_6]$  des formes modulaires pour  $SL(2, \mathbb{Z})$  est engendrée par une fonction de poids 4 et une de poids 6, on en déduit que

$$\dim \text{JS}_k = \sum_{c=0}^{\lfloor k/4 \rfloor} d(2k - 8c) \quad (26)$$

où pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on a noté  $d(j)$  la dimension de l'espace des formes modulaires de poids  $j$ , explicitement donnée par

$$d(j) = \left\lfloor \frac{j}{12} \right\rfloor + \begin{cases} 0 & \text{si } 12 \text{ divise } j-2 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (27)$$

Même s'il n'existe pas de formes modulaires de poids négatifs, et que  $d(j)$  devrait être choisi nul pour  $j < 0$ , on prend une autre convention pour mener la suite des calculs qui ne font pas intervenir l'aspect modulaire de  $d$  mais seulement son aspect combinatoire. On étend la définition de  $d$  par (27) à  $\mathbb{Z}$  tout entier. On a alors  $d(j+12) = d(j) + 1$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $x$  un réel, on note  $\|x\|$  l'entier le plus proche de  $x$  (avec la convention  $\|n+1/2\| = n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ).

**Proposition 9.** *Pour tout entier naturel  $k$ , la dimension  $d_S(k)$  de l'espace des formes de Jacobi singulières d'indice nul et de poids  $k$  est donnée par*

$$d_S(k) = \dim \text{JS}_k = \left\| \frac{(k + 3\eta(k))^2}{48} \right\| \quad \text{avec} \quad \eta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (28)$$

La série génératrice de ces dimensions est

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_S(k) \cdot z^k = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}$$

et on a les relations de récurrence :

$$d_S(2k+3) = d_S(2k) \quad \text{et} \quad d_S(2k+13) = d_S(2k+1) + k + 5$$

pour tout entier  $k$ . Les premières valeurs sont données par

$k$	0	1	2	4	6	8	10	12
$d_S(k)$	1	0	1	2	3	4	5	7

*Démonstration.* En comptant les éléments de la base (25) de  $JS_k$ , on trouve que la série génératrice de  $d_S$  est

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \#\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : k = 2a + 3b + 4c\} z^k = \sum_{a \in \mathbb{N}} z^{2a} \sum_{b \in \mathbb{N}} z^{3b} \sum_{c \in \mathbb{N}} z^{4c} = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}.$$

On en déduit ensuite

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_S(2k) z^k = \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)}$$

puis

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_S(2k+1) z^k = \frac{z}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)}.$$

On en tire immédiatement que

$$d_S(2k) = d_S(2k+3) \tag{29}$$

pour tout entier  $k$ . Compte-tenu de (26) et de l'extension à  $\mathbb{Z}$  de (27), on a

$$d_S(2k+13) = d_S(2k+1) + \sum_{c=\lfloor \frac{2k+1}{4} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{2k+1}{4} \rfloor + 3} d(4k-8c+2) + 2 \left\lfloor \frac{2k+1}{4} \right\rfloor + 8.$$

On en déduit la deuxième relation de récurrence :

$$d_S(2k+13) = d_S(2k+1) + k + 5 \tag{30}$$

pour tout entier  $k$ .

L'application  $\varphi : k \mapsto \frac{(k+3\eta(k))^2}{48}$  vérifie elle aussi les relations (29) et (30), il est donc de même de  $\|\varphi\|$ . On conclut que  $d_S(k) = \left\| \frac{(k+3\eta(k))^2}{48} \right\|$  pour tout entier  $k$ , en comparant les valeurs pour  $k \in \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ , □

*Remarque 10.* On déduit de la série génératrice de  $(d_S(k))_{k \in \mathbb{N}}$  que cette suite est  $(t(k+3))_{k \in \mathbb{N}}$  où  $t$  est la suite d'Alcuin [10]. La formule explicite est alors démontrée dans [3, Theorem 1]. Les équations (29) et (30) sont données dans ce contexte dans [1] et démontrées dans [11].

*Remarque 11.* On peut obtenir de façon systématique des formules similaires pour les dimensions des espaces considérés dans ce texte. Une discussion sur ces formules est proposée en annexe.



*Démonstration.* La première relation sur  $J$  est bien connue et facile à vérifier. Pour la deuxième formule, dérivons (33) par rapport à  $\tau$ . En notant  $H = (H_1, H_2)$ , on trouve :

$$\frac{1}{J(AB)} \left( \frac{1}{J(AB)}, -Y(AB) \right) = \frac{\partial H(A)}{\partial \tau} (H(B)) \frac{\partial H_1(B)}{\partial \tau} + \frac{\partial H(A)}{\partial z} (H(B)) \frac{\partial H_2(B)}{\partial \tau}$$

ce qui, en utilisant (34), conduit à

$$\left( \frac{1}{J(AB)(x)^2}, -\frac{Y(AB)(x)}{J(AB)(x)} \right) = \left( \frac{1}{J(A)(Bx)^2 J(B)(x)^2}, -\frac{Y(A)(Bx)}{J(A)(Bx) J(B)(x)^2} - \frac{Y(B)(x)}{J(A)(Bx) J(B)(x)} \right)$$

où l'on a noté  $x = (\tau, z)$ . En comparant les deuxièmes coordonnées et en utilisant la formule précédente, on obtient  $Y(AB)(x) = J(B)(x)^{-1} Y(A)(Bx) + Y(B)(x)$  ce qui montre la relation voulue.

Dérivons ensuite par rapport à  $z$  la relation de cocyclicité de  $Y$ , on trouve

$$\frac{\partial Y(AB)}{\partial z}(x) = \frac{1}{J(B)(x)} \frac{\partial Y(A)}{\partial \tau}(Bx) \frac{\partial H_1(B)}{\partial z}(x) + \frac{1}{J(B)(x)} \frac{\partial Y(A)}{\partial z}(Bx) \frac{\partial H_2(B)}{\partial z}(x) + \frac{\partial Y(B)}{\partial z}(x).$$

Grâce à (35b) et (34), on en déduit

$$X(AB)(x) = J(B)(x)^{-2} X(A)(Bx) + X(B)(x).$$

C'est la relation de cocyclicité de  $X$ . □

### 3.2. Définition.

**Définition 13.** Une fonction singulière  $f: \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une forme *singulière quasi-Jacobi* (d'indice nul), de poids  $k \in \mathbb{N}$  et de profondeur  $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$  s'il existe  $(f_{j_1, j_2})_{\substack{0 \leq j_1 \leq s_1 \\ 0 \leq j_2 \leq s_2}} \in \mathcal{S}^{(s_1+1)(s_2+1)}$

telle que

$$\forall A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2 \quad f|_{k,0} A = \sum_{j_1=0}^{s_1} \sum_{j_2=0}^{s_2} f_{j_1, j_2} X(A)^{j_1} Y(A)^{j_2}. \quad (36)$$

où  $f_{s_1, s_2}$  est non identiquement nulle. On convient de noter désormais  $f|_k A := f|_{k,0} A$ , on ne considérera que des formes d'indice nul. Il résulte de l'indépendance algébrique de  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{C}$  que la décomposition (36) est unique. On note alors  $Q_{j_1, j_2}(f) = f_{j_1, j_2}$ , et on appelle  $s_1$  la *profondeur modulaire* de  $f$  et  $s_2$  sa *profondeur elliptique*. L'espace vectoriel des formes singulières quasi-Jacobi de poids  $k$  et profondeurs inférieures ou égales à  $s_1$  et  $s_2$  est noté  $\mathrm{JS}_k^{\leq s_1, s_2}$ ; l'espace vectoriel des formes singulières quasi-Jacobi de poids  $k$  est noté  $\mathrm{JS}_k^\infty$ .

*Remarque 14.* La notion introduite ici est cohérente avec celle de [23, §2.4]. Alors que cette article expose une approche *via* la notion de *forme presque Jacobi*, nous privilégions une approche directe.

*Remarque 15.* Le choix  $A = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0, 0) \right)$  implique que  $Q_{0,0}(f) = f$ . Cela entraîne en particulier que  $\mathrm{JS}_k^{\leq 0,0}$  est l'espace  $\mathrm{JS}_k$  des formes de Jacobi singulières d'indice nul et de poids  $k$  rencontrées précédemment.

*Remarque 16.* • Soit  $f \in \mathrm{JS}_k^\infty$  et  $g \in \mathrm{JS}_\ell^\infty$ , alors on a  $fg \in \mathrm{JS}_{k+\ell}^\infty$  et

$$Q_{i,j}(fg) = \sum_{\substack{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \alpha + \beta = i \\ \gamma + \delta = j}} Q_{\alpha, \gamma}(f) Q_{\beta, \delta}(g).$$

- Il résulte de l'indépendance algébrique de  $X, Y$  et  $J$  sur  $\mathbb{C}$  que les espaces  $\text{JS}_k^\infty$  sont en somme directe. On peut donc considérer l'algèbre graduée par le poids  $\text{JS}^\infty = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{JS}_k^\infty$ , qu'on conviendra d'appeler algèbre des formes singulières quasi-Jacobi.

**3.3. Stabilité par dérivation.** La dérivation par rapport à  $z$  est nulle sur l'algèbre  $M$  des formes modulaires. En revanche,  $M$  n'est pas stable par dérivation par rapport à  $\tau$ , ce qui justifie l'introduction de l'algèbre  $M^\infty$  des formes quasimodulaires[18, 14].

L'algèbre  $\text{JS}$  des formes de Jacobi singulières est stable par dérivation par rapport à  $z$  mais n'est pas stable par dérivation par rapport à  $\tau$  (comme on le verra plus tard, voir remarque 19 page suivante, (49) et (50)). Nous montrons ici que l'algèbre  $\text{JS}^\infty$  est stable par chacune de ces dérivations.

**Lemme 17.** Soit  $f : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable par rapport à chaque variable, alors

$$\frac{\partial(f|_k A)}{\partial z} = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{k+1} A \quad (37)$$

et

$$\frac{\partial(f|_k A)}{\partial \tau} = -k(f|_k A)X(A) + \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \Big|_{k+2} A - Y(A) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{k+1} A. \quad (38)$$

*Démonstration.* Le résultat est obtenu en dérivant par rapport à  $z$  et à  $\tau$  la définition  $f|_k A = J(A)^{-k} f(H(A))$  puis en utilisant (34) et (35).  $\square$

**Proposition 18.** L'algèbre  $\text{JS}^\infty$  est stable par les dérivations en  $z$  et  $\tau$ . La dérivation  $\partial/\partial z$  envoie  $\text{JS}_k^{\leq s_1, s_2}$  dans  $\text{JS}_{k+1}^{\leq s_1+1, s_2}$ ; la dérivation  $\partial/\partial \tau$  envoie  $\text{JS}_k^{\leq s_1, s_2}$  dans  $\text{JS}_{k+2}^{\leq s_1+1, s_2+1}$ . D'autre part, pour  $f \in \text{JS}_k^\infty$ ,

$$Q_{j_1, j_2} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial Q_{j_1, j_2}(f)}{\partial z} + (j_2 + 1) Q_{j_1-1, j_2+1}(f)$$

et

$$Q_{j_1, j_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial Q_{j_1, j_2}(f)}{\partial \tau} + \frac{\partial Q_{j_1, j_2-1}(f)}{\partial z} + (k - j_1 + 1) Q_{j_1-1, j_2}(f).$$

Plus précisément,

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{JS}_k^{\leq s_1, s_2} \subseteq \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1+1, s_2-1} + \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1, s_2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{JS}_k^{\leq s_1, s_2} \subseteq \text{JS}_{k+2}^{\leq s_1+1, s_2} + \text{JS}_{k+2}^{\leq s_1, s_2+1}.$$

*Démonstration.* Grâce à (37) et à la définition 13, on trouve

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{k+1} A = \sum_{j_1=0}^{s_1} \sum_{j_2=0}^{s_2} \left( \frac{\partial f_{j_1, j_2}}{\partial z} X(A)^{j_1} Y(A)^{j_2} + j_2 f_{j_1, j_2} X(A)^{j_1+1} Y(A)^{j_2-1} \right).$$

On en déduit les résultats relatifs à  $\partial/\partial z$ .

D'autre part, grâce à (38) et à la définition 13, on trouve

$$\begin{aligned} -k(f|_k A)X(A) + \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \Big|_{k+2} A - Y(A) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{k+1} A = \\ \sum_{j_1=0}^{s_1} \sum_{j_2=0}^{s_2} \left( \frac{\partial f_{j_1, j_2}}{\partial \tau} X(A)^{j_1} Y(A)^{j_2} - j_1 f_{j_1, j_2} X(A)^{j_1+1} Y(A)^{j_2} - j_2 f_{j_1, j_2} X(A)^{j_1+1} Y(A)^{j_2} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les résultats relatifs à  $\partial/\partial z$ , on trouve alors ceux relatifs à  $\partial/\partial \tau$ .

Si  $f \in \text{JS}_k^{\leq s_1, s_2}$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial z} \in \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1+1, s_2}$  mais  $Q_{s_1+1, s_2}(\partial f/\partial z) = 0$  donc  $\frac{\partial f}{\partial z} \in \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1+1, s_2-1} + \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1, s_2}$ . L'inclusion pour  $\partial/\partial \tau$  se démontre de la même façon.  $\square$

*Remarque 19.* Ainsi, si  $s_2 = 0$  alors  $\frac{\partial f}{\partial z} \in \text{JS}_{k+1}^{\leq s_1, 0}$ . En particulier, si  $f \in \text{JS}_k$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} \in \text{JS}_{k+1}$ .

**3.4. Exemples fondamentaux.** Les résultats de cette partie sont résumés dans la table 1 page suivante.

**3.4.1. Formes quasimodulaires.** Comme dit dans le paragraphe 2.3.2, on identifie dans la suite tout fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  avec la fonction  $f : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(\tau, z) = f(\tau)$ . Via cette identification, toute forme modulaire de poids  $k$  est une forme singulière quasi-Jacobi de poids  $k$  et profondeur  $(0, 0)$ . La dérivée  $n$ -ième (en  $\tau$ ) d'une forme modulaire de poids  $k$  est alors une forme singulière quasi-Jacobi de poids  $k + 2n$  et profondeur  $(n, 0)$ . De même,  $e_2$  est une forme singulière quasi-Jacobi de poids 2 et profondeur  $(1, 0)$  avec  $Q_{1,0}(e_2) = -2i\pi$ . L'algèbre des formes quasimodulaires étant engendrée par les formes modulaires  $e_4$  et  $e_6$  et par la forme quasimodulaire  $e_2$ , on a donc montré que les formes quasimodulaires sont toutes des formes singulières quasi-Jacobi.

**3.4.2. La première fonction d'Eisenstein décalée.** La série d'Eisenstein décalée de poids 1 est la série définie sur  $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$  par

$$E_1(\tau, z) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=-M}^M \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ m=0 \Rightarrow n \neq 0}}^N \frac{1}{z + m + n\tau} \right)$$

[24, Chapter III, §2]. Cette fonction est bien définie et admet un développement en série de Laurent

$$E_1(\tau, z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} e_{2n+2}(\tau) z^{2n+1} \quad (39)$$

la série convergeant sur tout disque ouvert époiné de centre  $z = 0$  de rayon inférieur à  $|\tau|$  [24, Chapter III, eq. (9)]. Elle vérifie l'équation :

$$\forall A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \quad E_1|_1 A = E_1 + 2i\pi Y(A)$$

[5, Lemma 1]<sup>4</sup>; la fonction  $z \mapsto E_1(\tau, z)$  est méromorphe, ses pôles sont les points du réseau  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  et ils sont simples. La fonction  $E_1$  est donc une forme singulière quasi-Jacobi de poids 1 et profondeur  $(0, 1)$ .

*Remarque 20.* Nous utilisons la convention de Weil dans [23] qui réserve les lettres majuscules aux fonctions intrinsèquement de deux variables et les lettres minuscules aux fonctions intrinsèquement d'une variable. La fonction  $E_1$  et les généralisations obtenues en remplaçant  $z + m + n\tau$  par  $(z + m + n\tau)^k$  sont des cas particuliers de ce que Charollois & Sczech [4] appellent séries de Kronecker-Eisenstein. Notre fonction  $E_1$  est leur fonction  $K^*(z, 0, 1, \tau) = \text{Ser}(0, 0, z, \tau)$ .

**Lemme 21.** Les fonctions  $\wp$ ,  $\partial_z \wp$ ,  $e_4$ ,  $E_1$  et  $e_2$  sont algébriquement indépendantes.

4. Dans ce travail, on a noté  $J_1$  ce que l'on note ici  $\frac{1}{2i\pi} E_1$ .

Fonction	Poids	Profondeur ( $s_1, s_2$ )	$Q_{s_1, s_2}$
$\wp$	2	(0, 0)	$\wp$
$\partial_z \wp$	3	(0, 0)	$\partial_z \wp$
$e_4$	4	(0, 0)	$e_4$
$E_1$	1	(0, 1)	$2i\pi$
$e_2$	2	(1, 0)	$-2i\pi$

TABLE 1. Exemples fondamentaux de formes singulières quasi-Jacobi.

*Démonstration.* Grâce au théorème 8, il suffit de montrer que si  $k, s_1$  et  $s_2$  sont des entiers et si les  $f_{j_1, j_2}$  sont des formes de Jacobi singulières de poids  $k - j_1 - 2j_2$  telles que

$$\sum_{j_1=0}^{s_1} \sum_{j_2=0}^{s_2} f_{j_1, j_2} E_1^{j_1} e_2^{j_2} = 0 \quad (40)$$

alors, les  $f_{j_1, j_2}$  sont toutes nulles. Supposons par l'absurde que l'une est non nulle, on peut supposer que c'est  $f_{s_1, s_2}$ . Alors, le terme de gauche de (40) est de profondeur  $(s_1, s_2)$ . Par unicité de la profondeur, on déduit que  $s_1 = s_2 = 0$  puisque le membre de droite est de profondeur nulle puis la nullité de tous les  $f_{j_1, j_2}$ .  $\square$

**3.5. Structure.** La partie 3.4 montre  $\mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2] \subseteq \mathcal{J}S^\infty$ . L'objectif de cette partie est de montrer l'égalité des deux algèbres.

La preuve repose sur le lemme suivant.

**Lemme 22.** *Soit  $f$  une forme singulière quasi-Jacobi de poids  $k$  et profondeur  $(s_1, s_2)$ . Alors  $Q_{s_1, s_2}(f)$  est une forme de Jacobi singulière de poids  $k - 2s_1 - s_2$ .*

*Démonstration.* Si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ , on a d'une part

$$f|_k(AB) = \sum_{x=0}^{s_1} \sum_{y=0}^{s_2} Q_{x, y}(f) X(AB)^x Y(AB)^y \quad (41)$$

et d'autre part

$$f|_k(AB) = (f|_k A)|_k B = \sum_{j_1=0}^{s_1} \sum_{j_2=0}^{s_2} (Q_{j_1, j_2}(f)|_{k-2j_1-j_2} B) (X(A)|_2 B)^{j_1} (Y(A)|_1 B)^{j_2}.$$

Pour transformer cette dernière égalité, on utilise la proposition 12 pour obtenir

$$f|_k(AB) = \sum_{x=0}^{s_1} \sum_{y=0}^{s_2} \left( \sum_{j_1=x}^{s_1} \sum_{j_2=y}^{s_2} \binom{j_1}{x} \binom{j_2}{y} (-X(B))^{j_1-x} (-Y(B))^{j_2-y} \right) (Q_{j_1, j_2}(f)|_{k-2j_1-j_2} B) X(AB)^x Y(AB)^y. \quad (42)$$

Comparant les coefficients de  $X(AB)^{s_1} Y(AB)^{s_2}$  dans (41) et (42), on trouve

$$Q_{s_1, s_2}(f)|_{k-2s_1-s_2} B = Q_{s_1, s_2}(f).$$

Puisque  $Q_{s_1, s_2}(f)$  est singulière, on en déduit que  $Q_{s_1, s_2}(f)$  est une forme de Jacobi singulière de poids  $k - 2s_1 - s_2$ .  $\square$

**Théorème 23.** *L'algèbre des formes singulières quasi-Jacobi est engendrée par les fonctions  $\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1$  et  $e_2$ . On a donc*

$$\mathcal{JS}^\infty = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2].$$

*Démonstration.* On a montré (voir le théorème 8) que  $\mathcal{JS} = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4]$ . Soit  $f \in \mathcal{JS}_k^{\leq s_1, s_2}$ , posons

$$g = f - (-1)^{s_1} \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^{s_1+s_2} Q_{s_1, s_2}(f) e_2^{s_1} E_1^{s_2}.$$

Alors

- (1)  $g \in \mathcal{JS}_k^{\leq s_1-1, s_2} + \mathcal{JS}_k^{\leq s_1, s_2-1}$ ;
- (2)  $Q_{s_1, s_2}(f) \in \mathcal{JS}_{k-2s_1-s_2} \subset \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4]$  d'après le lemme 22 et donc  $g-f \in \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2]$ .

A partir de la remarque 15, par récurrence sur  $s_1 + s_2$ , on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathcal{JS}_k^{\leq s_1, s_2} \subseteq \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2].$$

D'après le lemme 21,  $\mathcal{JS}^\infty$  est donc l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2]$ .  $\square$

**3.6. Sous-algèbres remarquables.** Les résultats de cette partie sont résumés figure 1 page ci-contre

3.6.1. *Formes quasi-Jacobi de type quasielliptique.*

**Définition 24.** On appelle *forme quasi-Jacobi de type quasielliptique* de poids  $k$  et profondeur  $s$  toute forme singulière quasi-Jacobi de poids  $k$  et profondeur  $(0, s)$ .

On note  $\mathcal{JS}_k^{0, \leq s}$  l'espace vectoriel de telles formes de profondeur inférieure ou égale à  $s$ . On note alors  $\mathcal{JS}^{0, \infty} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigcup_{s \geq 0} \mathcal{JS}_k^{0, \leq s}$  qu'on convient d'appeler dans la suite ensemble des formes quasi-Jacobi de type quasielliptique.

Grâce au théorème 23, c'est une algèbre de polynômes :

$$\mathcal{JS}^{0, \infty} = \mathbb{C}[\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1].$$

On a  $M \subset \mathcal{JS} \subset \mathcal{JS}^{0, \infty} \subset \mathcal{JS}^\infty$ .

L'équation (45) montre que  $\mathcal{JS}^{0, \infty}$  n'est pas stable par la *dérivation modulaire*

$$\partial_\tau = \frac{\pi}{2i} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

D'après les équations (23) et (39), on a

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\wp - e_2 \tag{43}$$

et donc  $\mathcal{JS}^{0, \infty}$  n'est pas stable par la *dérivation elliptique*

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

La table 2 page 18 récapitule les stabilités par dérivation des différentes algèbres en jeu.

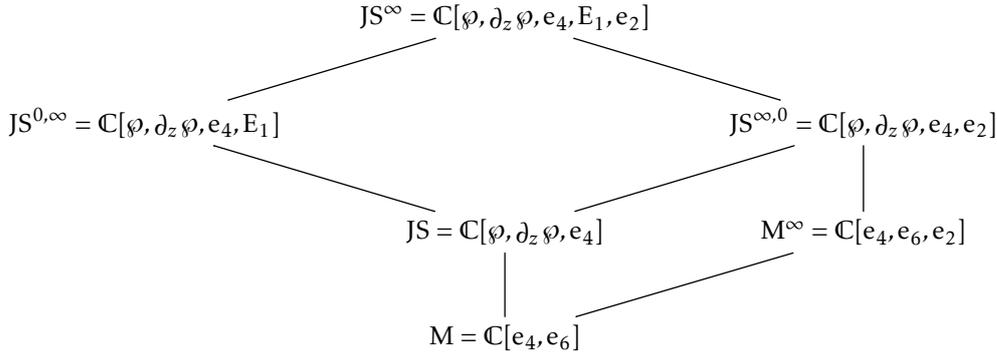


FIGURE 1. Sous-algèbres remarquables.

### 3.6.2. Formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire.

**Définition 25.** On appelle *forme quasi-Jacobi de type quasimodulaire* de poids  $k$  et profondeur  $s$  toute forme singulière quasi-Jacobi de poids  $k$  et profondeur  $(s, 0)$ .

On note  $JS_k^{\leq s, 0}$  l'espace vectoriel de telles formes de profondeur inférieure ou égale à  $s$ . On note  $JS^{\infty, 0} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigcup_{s \geq 0} JS_k^{\leq s, 0}$  qu'on convient d'appeler dans la suite ensemble des formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire.

Grâce au théorème 23, c'est une algèbre de polynômes :

$$JS^{\infty, 0} = \mathbb{C}[\varphi, \partial_z \varphi, e_4, e_2].$$

On a  $M \subset JS \subset JS^{\infty, 0} \subset JS^{\infty}$  et  $M \subset M^{\infty} \subset JS^{\infty, 0} \subset JS^{\infty}$ .

Grâce à la remarque 19, l'algèbre  $JS^{\infty, 0}$  est stable par la dérivation  $\partial_z$ . L'équation (45) montre qu'elle n'est pas stable par la dérivation  $\partial_{\tau}$ .

## 3.7. Équations différentielles fondamentales.

### 3.7.1. Dérivée d'Oberdieck.

**Définition 26.** On définit une dérivation sur l'algèbre  $JS^{\infty}$  des formes singulières quasi-Jacobi en prolongeant par linéarité la définition suivante

$$\text{pour tout forme } f \in JS_k^{\infty}, \quad \text{Ob}^*(f) = 4\partial_{\tau}(f) + E_1\partial_z(f) - ke_2f.$$

On appelle *dérivation d'Oberdieck* cette dérivation.

*Remarque 27.* On a  $\text{Ob}^* = 4\pi^2 \text{Ob}$  où  $\text{Ob}$  est définie dans [5]. Le nom fait référence au travail de Georg Oberdieck [15]. La restriction de  $\text{Ob}^*$  à  $M$  est la dérivation de Serre.

La dérivation  $\text{Ob}^*$  envoie par définition  $JS_k^{\leq s_1, s_2}$  dans  $JS_{k+2}^{\leq s_1+1, s_2+1}$ . On a plus précisément la proposition suivante :

**Proposition 28.** (1) La dérivation  $\text{Ob}^*$  envoie  $JS_k^{\leq s_1, s_2}$  dans  $JS_{k+2}^{\leq s_1+1, s_2}$ .

(2) L'algèbre  $JS$  est stable par  $\text{Ob}^*$  : l'image par  $\text{Ob}^*$  de toute forme de Jacobi singulière de poids  $k$  est une forme de Jacobi singulière de poids  $k+2$ .

	$\partial_z$	$\partial_\tau$	Ob*
M	oui	non	oui
JS	oui	non	oui
$M^\infty$	oui	oui	oui
$JS^{0,\infty}$	non	non	non
$JS^{\infty,0}$	oui	non	oui
$JS^\infty$	oui	oui	oui

TABLE 2. Stabilité des algèbres par dérivation.

*Démonstration.* Soit  $f \in JS_k^\infty$ . En utilisant la proposition 18, on voit que

$$Q_{j_1, j_2}(\text{Ob}^*(f)) = 4\partial_\tau(Q_{j_1, j_2}(f)) + E_1\partial_z(Q_{j_1, j_2}(f)) - k e_2 Q_{j_1, j_2}(f) + 2i\pi(j_1 + j_2 - 1)Q_{j_1-1, j_2}(f) + (j_2 + 1)E_1 Q_{j_1-1, j_2+1}(f). \quad (44)$$

Si  $f \in JS_k^{\leq s_1, s_2}$ , on a donc  $Q_{j_1, s_2+1}(f) = 0$  pour tout  $j_1$ , donc  $\text{Ob}^*(f) \in JS_{k+2}^{\leq s_1+1, s_2}$ .

Si  $f \in JS_k$ , on a  $Q_{1,0}(\text{Ob}^*(f)) = 0$  ce qui démontre que  $\text{Ob}^*(f) \in JS_{k+2}$ .  $\square$

*Remarque 29.* D'après la proposition 28, la dérivation d'Oberdieck stabilise  $JS^{\infty,0}$ . En revanche, comme on le verra à l'équation (51), elle ne stabilise pas  $JS^{0,\infty}$ .

**3.7.2. Applications.** Les résultats généraux des paragraphes précédents permettent, en calculant explicitement les images par dérivation des générateurs  $\wp, \partial_z \wp, e_4, E_1, e_2$ , de déterminer des relations différentielles entre ces générateurs.

La fonction  $\wp$  est une forme de Jacobi singulière de poids 2 et  $\text{Ob}^*(\wp)$  est donc une forme de Jacobi singulière de poids 4; grâce à la proposition 9 la dimension de  $JS_4$  est 2, une base étant  $(\wp^2, e_4)$ . En égalisant les coefficients en  $1/z^4$  et constant, on trouve

$$\text{Ob}^*(\wp) = -2(\wp^2 - 10e_4).$$

d'où l'on déduit

$$-4\partial_\tau \wp = E_1\partial_z \wp + 2\wp^2 - 2e_2 \wp - 20e_4. \quad (45)$$

L'égalisation des coefficients en  $z^{2n}$  pour tout  $n \geq 1$  conduit ensuite à

$$\begin{aligned} & 2(2n+1)\partial_\tau e_{2n+2} \\ &= (n+1)(2n+1)e_{2n+2}e_2 - (n+2)(2n+5)e_{2n+4} + \sum_{\substack{a \geq 1, b \geq 1 \\ a+b=n}} (2a+1)(a-2b-1)e_{2a+2}e_{2b+2}. \end{aligned} \quad (46)$$

En particulier pour  $n = 1$  et  $n = 2$  (et compte-tenu de l'égalité  $e_8 = \frac{3}{7}e_4^2$  qui est conséquence du fait que l'espace des formes modulaires de poids 8 est de dimension 1) on retrouve à l'aide de

(31) les équations de Ramanujan

$$\partial_\tau e_4 = e_4 e_2 - \frac{7}{2} e_6 \quad (47a)$$

$$= -\frac{1}{10} \wp^3 + \frac{1}{40} (\partial_z \wp)^2 + \frac{3}{2} \wp e_4 + e_4 e_2 \quad (47b)$$

$$\partial_\tau e_6 = \frac{3}{2} e_6 e_2 - \frac{15}{7} e_4^2. \quad (47c)$$

En particulier

$$\text{Ob}^*(e_4) = -14e_6 = -\frac{2}{5} \wp^3 + 6\wp e_4 + \frac{1}{10} (\partial_z \wp)^2. \quad (48)$$

Grâce à la remarque 19, la fonction  $\partial_z^2 \wp$  est une forme de Jacobi singulière de poids 4 et donc une combinaison linéaire de  $\wp^2$  et  $e_4$ . En égalisant les termes en  $z^{-4}$  et constant du développement de Laurent, on obtient :

$$\partial_z^2 \wp = 6(\wp^2 - 5e_4). \quad (49)$$

La fonction  $\partial_z \wp$  est une forme de Jacobi singulière de poids 3 et  $\text{Ob}^*(\partial_z \wp)$  est donc une forme de Jacobi singulière de poids 5 ; l'espace  $\text{JS}_5$  est de dimension 1 engendré par  $\wp \partial_z \wp$ . En égalisant les coefficients en  $1/z^5$ , on trouve

$$\text{Ob}^*(\partial_z \wp) = -3\wp \partial_z \wp$$

d'où l'on déduit

$$\partial_\tau \partial_z \wp = \frac{3}{2} (5e_4 - \wp^2) E_1 + \frac{3}{4} (-\wp + e_2) \partial_z \wp. \quad (50)$$

Par la proposition 28,  $\text{Ob}^*(E_1) \in \text{JS}_3^{\leq 1,1}$ . On a  $Q_{1,1}(\text{Ob}^*(E_1)) = -4\pi^2$ , puis  $Q_{1,0}(\text{Ob}^*(E_1)) = 2i\pi E_1 = Q_{1,0}(-E_1 e_2)$  et  $Q_{0,1}(\text{Ob}^*(E_1)) = -2i\pi e_2 = Q_{0,1}(-E_1 e_2)$ ; on en déduit que  $\text{Ob}^*(E_1) + E_1 e_2 \in \text{JS}_3 = \mathbb{C} \partial_z \wp$ . Finalement,

$$\text{Ob}^*(E_1) = \frac{1}{2} \partial_z \wp - E_1 e_2. \quad (51)$$

Il en résulte que  $\text{JS}^{0,\infty}$  n'est pas stable par  $\text{Ob}^*$ . Compte-tenu de (43), on obtient ensuite

$$4 \partial_\tau E_1 = E_1 e_2 + \wp E_1 + \frac{1}{2} \partial_z \wp. \quad (52)$$

De même,  $\text{Ob}^*(e_2) \in \text{JS}_4^{\leq 2,0}$ . Grâce à (44),  $Q_{2,0}(\text{Ob}^*(e_2)) = 4\pi^2 = Q_{2,0}(-e_2^2)$  puis  $Q_{1,0}(\text{Ob}^*(e_2)) = 4i\pi e_2 = Q_{1,0}(-e_2^2)$ . On en déduit que  $\text{Ob}^*(e_2) + e_2^2 \in \text{JS}_4 = \mathbb{C} \wp^2 + \mathbb{C} e_4$ . La dépendance en  $z$  montre que  $\text{Ob}^*(e_2) + e_2^2 \in \mathbb{C} e_4$  puis le calcul du premier coefficient de Fourier permet de retrouver l'image de  $e_2$  par la dérivation de Serre

$$\text{Ob}^*(e_2) = -e_2^2 - 5e_4, \quad (53)$$

et donc l'équation de Ramanujan

$$\partial_\tau e_2 = \frac{1}{4} (e_2^2 - 5e_4). \quad (54)$$

#### 4. CROCHETS DE RANKIN-COHEN ET DÉFORMATIONS FORMELLES

Cette partie est consacrée à la construction de déformations formelles (voir [12, Chapter 13], [6, § 1.1]) des différentes algèbres de formes quasi-Jacobi étudiées précédemment.

**4.1. Crochets de Rankin-Cohen des formes quasi-Jacobi de type quasielliptique.** D'après la proposition 18, la dérivation modulaire  $\partial_\tau$  de  $\text{JS}^\infty$  est homogène de degré 2 pour cette graduation :  $\partial_\tau(\text{JS}_k^\infty) \subseteq \text{JS}_{k+2}^\infty$  pour tout  $k \geq 0$ . On peut alors définir une déformation formelle de  $\text{JS}^\infty$  du type des crochets de Rankin-Cohen formels au sens de [6].

**Proposition 30.** *Considérons la suite  $([\ , \ ]_n)_{n \geq 0}$  d'applications de  $\text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty$  dans  $\text{JS}^\infty$  définies par prolongement bilinéaire de*

$$[f, g]_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r} \binom{\ell+n-1}{r} \partial_\tau^r(f) \partial_\tau^{n-r}(g) \quad (55)$$

pour tous  $f \in \text{JS}_k^\infty, g \in \text{JS}_\ell^\infty$ . Alors :

- (i)  $[\text{JS}_k^\infty, \text{JS}_\ell^\infty]_n \subseteq \text{JS}_{k+\ell+2n}^\infty$  pour tous  $n, k, \ell \geq 0$ .
- (ii) La suite  $([\ , \ ]_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $\text{JS}^\infty$ .
- (iii) La sous-algèbre  $M$  est stable par les applications  $[\ , \ ]_n$ , leur restriction coïncidant avec les crochets de Rankin-Cohen classiques sur les formes modulaires.

*Démonstration.* Les points (i) et (ii) découlent d'une application directe du résultat algébrique général de [6, Proposition 3]. Le point (iii) est le résultat classique prouvé par exemple en [26, §5.2].  $\square$

On a vu au § 3.6.1 que la sous-algèbre  $\text{JS}^{0,\infty}$  n'est pas stable par la dérivation  $\partial_\tau$ . Elle l'est cependant par la déformation ci-dessus.

**Théorème 31.** *La sous-algèbre  $\text{JS}^{0,\infty}$  est stable par la suite de crochets de Rankin-Cohen  $([\ , \ ]_n)_{n \geq 0}$ .*

*Démonstration.* On utilise la méthode générale d'extension-restriction formulée au Theorem 6 de [6]. On considère pour cela l'inclusion  $A \subset R$  où l'on note  $R = \text{JS}^\infty$  et  $A = \text{JS}^{0,\infty}$ . On note  $\delta$  la dérivation de  $R$  de multiplication par la moitié du poids, c'est-à-dire définie par extension linéaire de

$$\delta(f) = \frac{k}{2} f \quad \text{pour tout } f \in \text{JS}_k^\infty. \quad (56)$$

On introduit par ailleurs la dérivation de  $R$  définie par

$$\theta = \frac{1}{4}(\text{Ob}^* - E_1 \partial_z) = \partial_\tau - \frac{1}{2} e_2 \delta. \quad (57)$$

Il est clair que  $\delta(A) \subseteq A$ . D'autre part  $A = \text{JS}[E_1]$ , les dérivations  $\partial_z$  et  $\text{Ob}^*$  stabilisent  $\text{JS}$  par la table 2 page 18, donc  $\theta(\text{JS}) \subseteq A$  puis

$$\theta(E_1) = \frac{1}{8}(\partial_z \varphi + 2\varphi E_1)$$

grâce à (43) et (51). On en déduit que  $\theta(A) \subseteq A$ .

De plus la dérivation  $\theta$  est homogène de degré 2 pour la graduation définie par le poids sur  $R$  et on a

$$\delta \theta - \theta \delta = \theta. \quad (58)$$

On pose  $x = \frac{1}{4} e_2$ , qui vérifie  $x \in R$  et  $x \notin A$ . Il vérifie  $\delta(x) = x$  et (53) montre que  $\theta(x) = -x^2 - \frac{5}{16} e_4$ . En posant  $h = -\frac{5}{16} e_4$ , on a  $h \in A$  avec  $\delta(h) = 2h$  et  $\theta(x) = -x^2 + h$ .

On est donc exactement dans les conditions d'application du Theorem 6 de [6] avec  $\partial_\tau = \theta + 2x \delta$ , et l'on conclut que la suite  $(\text{CM}_n^{\partial_\tau, \delta})_{n \geq 0}$  des crochets de Connes-Moscovici associée aux deux dérivations  $\partial_\tau$  et  $\delta$  définit par restriction à  $A$  une déformation formelle de  $A$ . Or ces crochets ne sont autres que les crochets de Rankin-Cohen  $([\ , \ ]_n)_{n \geq 0}$  comme on le vérifie par un calcul combinatoire immédiat (voir par exemple la preuve de la Proposition 3 de [6]).  $\square$

**Corollaire 32.** *La suite  $([\ , \ ]_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $\text{JS}^{0,\infty}$ , qui prolonge la suite des crochets de Rankin-Cohen classiques sur les formes modulaires.*

*Remarque 33.* Les sous-algèbres  $JS^{\infty,0}$  et  $JS$  ne sont pas stables par les crochets  $[\ , \ ]_n$ . Par exemple, il résulte de (45) et (47a) que  $[e_4, \varphi]_1$  est de profondeur  $(0, 1)$ , il n'appartient donc à aucune de ces sous-algèbres. On construit dans ce qui suit une déformation formelle de  $JS$  qui prolonge les crochets de Rankin-Cohen classiques sur les formes modulaires.

**4.2. CROCHETS DE RANKIN-COEN DES FORMES DE JACOBI SINGULIÈRES.** On commence par établir une variante de la proposition 30 en introduisant dans  $JS^{\infty}$  la dérivation

$$d = \partial_{\tau} + \frac{1}{4} E_1 \partial_z = \frac{1}{4} \text{Ob}^* + \frac{1}{2} e_2 \delta \quad (59)$$

où  $\delta$  est définie par la formule (57).

**Proposition 34.** *Considérons la suite  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$  d'applications de  $JS^{\infty} \times JS^{\infty}$  dans  $JS^{\infty}$  définies par prolongement bilinéaire de*

$$\llbracket f, g \rrbracket_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r} \binom{\ell+n-1}{r} d^r(f) d^{n-r}(g) \quad (60)$$

pour tous  $f \in JS_k^{\infty}, g \in JS_{\ell}^{\infty}$ . Alors :

- (i)  $\llbracket JS_k^{\infty}, JS_{\ell}^{\infty} \rrbracket_n \subset JS_{k+\ell+2n}^{\infty}$  pour tous  $n, k, \ell \geq 0$ .
- (ii) La suite  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $JS^{\infty}$ .
- (iii) La sous-algèbre  $M$  est stable par les applications  $\llbracket \ , \ \rrbracket_n$ , leur restriction coïncidant avec les crochets de Rankin-Cohen classiques sur les formes modulaires.

*Démonstration.* La dérivation  $d$  est homogène de degré 2. Il suffit donc une nouvelle fois d'appliquer la Proposition 3 de [6].  $\square$

L'algèbre  $JS$  n'est pas stable par la dérivation  $d$ , en effet elle est stable par  $\text{Ob}^*$  mais ne contient pas  $e_2$ . Elle l'est cependant par la déformation ci-dessus.

**Théorème 35.** *La sous-algèbre  $JS$  est stable par la suite de crochets de Rankin-Cohen  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$ .*

*Démonstration.* On reprend la structure de la preuve du théorème 31, avec  $A \subset R$  pour  $R = JS^{\infty}$  et  $A = JS$ . On introduit cette fois la dérivation de  $R$  définie par  $\theta' = \frac{1}{4} \text{Ob}^*$ . D'après la proposition 28, on a  $\delta(A) \subset A$  and  $\theta'(A) \subset A$ .

Puisque  $\theta'$  est homogène de degré 2, on a encore

$$\delta \theta' - \theta' \delta = \theta'. \quad (61)$$

Les mêmes éléments  $x = \frac{1}{4} e_2$  et  $h = -\frac{5}{16} e_4$  vérifient

$$h \in A, \ x \in R, \ x \notin A, \ \delta(x) = x, \ \delta(h) = 2h, \ \theta'(x) = -x^2 + h.$$

On conclut donc exactement de la même façon en appliquant le Theorem 6 de [6] avec cette fois  $d = \theta' + 2x\delta$ , de sorte que la suite  $(\text{CM}_n^{d,\delta})_{n \geq 0}$  des crochets de Connes-Moscovici associée aux deux dérivations  $d$  et  $\delta$  définit par restriction à  $A$  une déformation formelle de  $A$  qui coïncide avec la suite des crochets de Rankin-Cohen  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$  considérée ici.  $\square$

**Corollaire 36.** *La suite  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $JS$ , qui prolonge la suite des crochets de Rankin-Cohen classiques sur les formes modulaires.*

*Remarque 37.* La construction des crochets (60) et la stabilité de  $JS$  sont démontrées de façon différente dans [13, Proposition 2.15].

*Remarque 38.* D'après la remarque 33, la sous-algèbre  $JS^{\infty,0}$  n'est pas stable par  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$ . En revanche, elle est trivialement stable par  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$ , puisque  $JS^{\infty,0}$  est stable par  $\text{Ob}^*$ . On montre que  $\llbracket [E_1, e_4] \rrbracket_1$  est de profondeur modulaire 1 (par exemple en utilisant (48) et (51)) de sorte que  $JS^{0,\infty}$  n'est pas stable par  $(\llbracket \ , \ \rrbracket_n)_{n \geq 0}$ .

*Remarque 39.* La construction des crochets de Rankin-Cohen aux propositions 30 et 34 repose sur les relations (58) et (61) vérifiées pour les dérivations utilisées. Une construction très différente de déformation formelle de l'algèbre  $\text{JS}^\infty$  est proposée dans ce qui suit, en utilisant les dérivations  $\partial_\tau$  et  $\partial_z$ , qui vérifient  $\partial_\tau \circ \partial_z = \partial_z \circ \partial_\tau$ .

#### 4.3. Transvectants des formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire.

**Proposition 40.** *Considérons la suite  $(\{ , \}_n)_{n \geq 0}$  d'applications bilinéaires de  $\text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty$  dans  $\text{JS}^\infty$  définies par*

$$\{f, g\}_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \partial_\tau^{n-r} \partial_z^r(f) \partial_\tau^r \partial_z^{n-r}(g) \quad f, g \in \text{JS}^\infty \quad (62)$$

- (i) La suite  $(\frac{1}{n!} \{ , \}_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $\text{JS}^\infty$ .
- (ii)  $\{\text{JS}_k^\infty, \text{JS}_\ell^\infty\}_n \subset \text{JS}_{k+\ell+3n}^\infty$  pour tous  $n, k, \ell \geq 0$ .

*Démonstration.* Le point (i) est un résultat classique de théorie des invariants correspondant à l'associativité du produit de Moyal (voir par exemple [17, Proposition 5.20]). Le point (ii) découle du fait que  $\partial_\tau$  et  $\partial_z$  sont homogènes de degrés respectifs 2 et 1.  $\square$

*Remarque 41.* On rappelle les deux propriétés suivantes générales des transvectants utilisés dans la suite. D'une part ils satisfont la relation de récurrence :

$$\{f, g\}_{n+1} = \{\partial_\tau f, \partial_z g\}_n - \{\partial_z f, \partial_\tau g\}_n \quad (63)$$

initialisée par le fait que  $\{ , \}_0$  est le produit dans  $\text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty$ , et  $\{ , \}_1$  est le crochet de Poisson  $\partial_\tau \wedge \partial_z$  :

$$\{f, g\}_0 = fg \quad \text{et} \quad \{f, g\}_1 = \partial_\tau(f) \partial_z(g) - \partial_z(f) \partial_\tau(g).$$

D'autre part l'associativité du star-produit défini sur  $\text{JS}^\infty[[\hbar]]$  à partir de

$$\forall (f, g) \in \text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty \quad f \star g = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \{f, g\}_n \hbar^n \quad (64)$$

équivalent à :

$$\forall (f, g, h) \in \text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty \times \text{JS}^\infty \quad \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \{\{f, g\}_r, h\}_{n-r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \{f, \{g, h\}_r\}_{n-r}. \quad (65)$$

On a vu § 3.6.2 que  $\text{JS}^{\infty,0}$  est stable par  $\partial_z$  mais pas par  $\partial_\tau$ . Elle l'est cependant par les transvectants comme on va le voir ci-dessous. La preuve nécessite quelques résultats techniques préliminaires.

**Lemme 42.** *On considère la dérivation  $d = \partial_\tau + \frac{1}{4} E_1 \partial_z$  de  $\text{JS}^\infty$ ; on a :*

- (i)  $d(f) \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $\{f, g\}_1 \in \text{JS}^{\infty,0}$  pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ ;
- (ii)  $d(E_1) \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $\{f, E_1\}_1 \in \text{JS}^{\infty,0}$  pour tout  $f \in \text{JS}^{\infty,0}$ .

*Démonstration.* On a déjà considéré en (59) la dérivation  $d = \frac{1}{4} \text{Ob}^* + \frac{1}{2} e_2 \delta$ . L'algèbre  $\text{JS}^{\infty,0} = \text{JS}[e_2]$  est stable par  $\text{Ob}^*$  d'après le § 3.7.2 et elle est donc stable par  $d$ . On calcule pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$  :

$$\{f, g\}_1 = \partial_\tau(f) \partial_z(g) - \partial_z(f) \partial_\tau(g) = d(f) \partial_z(g) - \partial_z(f) d(g) \in \text{JS}^{\infty,0}$$

puisque  $\text{JS}^{\infty,0}$  est stable par  $d$  et par  $\partial_z$  d'après le § 3.6.2.

Il résulte de (51) que

$$d(E_1) = \frac{1}{8} \partial_z \varphi \in \text{JS} \subseteq \text{JS}^{\infty,0}. \quad (66)$$

Enfin, grâce à (43) :

$$\{f, E_1\}_1 = d(f) \partial_z(E_1) - d(E_1) \partial_z(f) = -(\wp + e_2)d(f) - \frac{1}{8} \partial_z(f) \partial_z \wp \in \text{JS}^{\infty,0}.$$

□

*Remarque 43.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d(E_1^n) = \frac{n}{8}(\partial_z \wp)E_1^{n-1} \in \text{JS}^{0,\infty} = \text{JS}[E_1]$ . Mais  $\text{JS}^{0,\infty}$  n'est pas stable par  $d$  puisque par exemple  $d\wp = \frac{1}{4}\text{Ob}^*(\wp) + \frac{1}{2}\wp e_2$  avec  $\text{Ob}^*(\wp) \in \text{JS}$  (voir proposition 28) et  $\wp e_2 \notin \text{JS}^{0,\infty}$ .

**Lemme 44.** Soit  $n \geq 1$  un entier vérifiant les deux propriétés suivantes :

(H1) pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ , on a  $\{f, g\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$ ;

(H2) pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ , on a  $\{f E_1, g\}_n - \{f, g E_1\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$ .

Alors, pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ , on a  $\{f, g\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $\{f, E_1\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$ .

*Démonstration.* D'après la formule de récurrence (63), on a

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{n+1} &= \{\partial_\tau f, \partial_z g\}_n - \{\partial_z f, \partial_\tau g\}_n \\ &= -\frac{1}{4}(\{\partial_z(f)E_1, \partial_z(g)\}_n - \{\partial_z(f), \partial_z(g)E_1\}_n) + (\{d(f), \partial_z(g)\}_n - \{\partial_z(f), d(g)\}_n). \end{aligned}$$

Or  $\{\partial_z(f)E_1, \partial_z(g)\}_n - \{\partial_z(f), \partial_z(g)E_1\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$  d'après l'hypothèse (H2) appliquée aux éléments  $\partial_z(f)$  et  $\partial_z(g)$  de  $\text{JS}^{\infty,0}$ . De même comme  $d(f)$  et  $d(g)$  appartiennent à  $\text{JS}^{\infty,0}$  d'après le lemme 42, la différence  $\{d(f), \partial_z(g)\}_n - \{\partial_z(f), d(g)\}_n$  est aussi un élément de  $\text{JS}^{\infty,0}$  par l'hypothèse (H1). On conclut que  $\{f, g\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$ . La même démonstration s'applique à  $f \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $g = E_1$  puisque  $\partial_z(E_1)$  et  $d(E_1)$  sont des éléments de  $\text{JS}^{\infty,0}$  d'après (43) et (66). On a donc  $\{f, E_1\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$ , ce qui achève la preuve. □

**Lemme 45.** Pour tout  $n \geq 1$  et toutes  $f, g \in \text{JS}^\infty$ , on a :

$$\begin{aligned} \{f E_1, g\}_n - \{f, g E_1\}_n &= f \{E_1, g\}_n + (-1)^{n-1} g \{E_1, f\}_n \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (\{f, E_1\}_i, g\}_{n-i} + (-1)^{n-1} \{g, E_1\}_i, f\}_{n-i}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'une part on peut réécrire chaque produit comme un crochet  $\{ \ , \ }_0$ , d'autre part pour tout  $0 \leq j \leq n$  le crochet  $\{ \ , \ }_j$  est  $(-1)^j$ -symétrique. L'égalité voulue peut donc être reformulée sous la forme

$$\begin{aligned} \{\{f, E_1\}_0, g\}_n - \{f, \{E_1, g\}_0\}_n &= \{f, \{E_1, g\}_n\}_0 - \{\{f, E_1\}_n, g\}_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (\{f, E_1\}_i, g\}_{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \{f, \{E_1, g\}_i\}_{n-i} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\{f, E_1\}_i, g\}_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \{f, \{E_1, g\}_i\}_{n-i}.$$

D'après (64) et (65) cette identité traduit l'égalité  $(f \star E_1) \star g = f \star (E_1 \star g)$ . Cette dernière égalité est satisfaite pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\text{JS}^\infty$  grâce au point (i) de la proposition 40. □

**Lemme 46.** On a  $\{f, g\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $\{f, E_1\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$  pour tout  $n \geq 1$  et tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est montré au lemme 42. Si la propriété est vraie pour tout  $1 \leq i \leq n$ , le lemme 45 montre alors que pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$  on a  $\{f, E_1, g\}_n - \{f, g, E_1\}_n \in \text{JS}^{\infty,0}$ . On conclut avec le lemme 44 que,  $\{f, g\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$  et  $\{f, E_1\}_{n+1} \in \text{JS}^{\infty,0}$  pour tous  $f, g \in \text{JS}^{\infty,0}$ .  $\square$

On a ainsi démontré que :

**Théorème 47.** *La suite  $(\frac{1}{n!}\{ , \}_n)_{n \geq 0}$  est une déformation formelle de  $\text{JS}^{\infty,0}$ .*

*Démonstration.* Résulte immédiatement du lemme ci-dessus et du point (i) de la proposition 40.  $\square$

*Remarque 48.* Les sous-algèbres  $\text{JS}^{0,\infty}$  et  $\text{JS}$  ne sont pas stables par  $(\{ , \}_n)_{n \geq 0}$  puisque par exemple  $\{e_4, \wp\}_1 \notin \text{JS}^{0,\infty}$  d'après (47b). Les crochets  $\{ , \}_n$  s'annulent sur  $M$  pour tout  $n \geq 1$ . La structure de Poisson sur  $\text{JS}^{\infty,0}$  définie par le crochet  $\{ , \}_1$  est étudiée dans [27]. On résume la situation page 25

*Remarque 49.* Avec le point (ii) de la proposition 40, le théorème 47 permet de construire, à partir de deux formes quasi-Jacobi de type quasimodulaire de poids respectifs  $k$  et  $\ell$ , une nouvelle forme dans  $\text{JS}^{\infty,0}$  de poids  $k + \ell + 3n$ , pour tout  $n \geq 0$ . C'est un processus comparable à celui obtenu aux sections 4.1 et 4.2 avec les crochets de Rankin-Cohen sur les formes quasi-Jacobi de type quasielliptique et sur les formes elliptiques, l'augmentation du poids étant dans ces cas de  $2n$ .

*Remarque 50.* L'objectif originel de cette étude est la construction de déformations formelles sur une algèbre contenant les fonctions elliptiques obtenues à partir de la fonction de Weierstraß et sa dérivée. C'est ce qui nous a motivé à introduire l'algèbre  $\mathbb{C}[\wp, \wp', e_4]$  puis  $\mathbb{C}[\wp, \wp', e_4, E_1, E_2]$  pour gagner la stabilité par dérivation. Il est alors naturel de considérer les algèbres que nous avons appelées *de type quasimodulaire* et *de type elliptique*. Un changement de contexte consiste à prendre pour point de départ la notion de forme de Jacobi d'indice non nécessairement nul, éventuellement sur un sous-groupe du groupe de Jacobi puis de chercher à construire des déformations formelles dans ce contexte. Ce travail reste à faire.



## ANNEXE B. DIMENSIONS DES SOUS ESPACES DES FORMES QUASI-JACOBI D'INDICE NUL

Si  $k$  est un entier, on définit  $P(k) = \frac{1+(-1)^k}{2}$  et  $I(k) = \frac{1-(-1)^k}{2}$ .

**Théorème 51.** Soit  $k \geq 0$  un entier. Les dimensions  $d_S(k)$  de  $JS_k$ ,  $d_S^{0,\infty}(k)$  de  $JS_k^{0,\infty}$ ,  $d_S^{\infty,0}(k)$  de  $JS_k^{\infty,0}$  et  $d_S^\infty(k)$  de  $JS_k^\infty$  sont données par

$$\begin{aligned} d_S(k) &= \frac{107}{288} + \frac{3}{16}k + \frac{1}{48}k^2 + \frac{9}{32}(-1)^k + \frac{1}{16}(-1)^k k + \frac{1}{8}(P(k) + I(k)i)i^k + \frac{1}{9}(j^k + j^{2k}) \\ d_S^{0,\infty}(k) &= \frac{175}{288} + \frac{15}{32}k + \frac{5}{48}k^2 + \frac{1}{144}k^3 + \frac{5}{32}(-1)^k + \frac{1}{32}(-1)^k k + \frac{1}{8}P(k)i^k + \frac{1}{27}(1-j)j^k + \frac{1}{27}(2+j)j^{2k} \\ d_S^{\infty,0}(k) &= \frac{121}{288} + \frac{55}{192}k + \frac{11}{192}k^2 + \frac{1}{288}k^3 + \frac{13}{32}(-1)^k + \frac{11}{64}(-1)^k k + \frac{1}{64}(-1)^k k^2 + \frac{1}{16}(P(k) + I(k)i)i^k \\ &\quad + \frac{1}{27}(2+j)j^k + \frac{1}{27}(1-j)j^{2k} \\ d_S^\infty(k) &= \frac{4267}{6912} + \frac{55}{96}k + \frac{199}{1152}k^2 + \frac{1}{48}k^3 + \frac{1}{1152}k^4 + \frac{63}{256}(-1)^k + \frac{3}{32}(-1)^k k + \frac{1}{128}(-1)^k k^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}P(k)i^k + \frac{1}{27}(j^k + j^{2k}) \end{aligned}$$

où  $j = \exp(2i\pi/3)$ .

*Démonstration.* Avec le même argument qu'en la proposition 9, les séries génératrices des dimensions sont

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} d_S(k) \cdot z^k &= \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}, \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} d_S^{0,\infty}(k) \cdot z^k &= \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}, \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} d_S^{\infty,0}(k) \cdot z^k &= \frac{1}{(1-z^2)^2(1-z^3)(1-z^4)} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_S^\infty(k) \cdot z^k = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)^2(1-z^3)(1-z^4)}.$$

La décomposition en éléments simples des membres de droites permet de justifier que les dimensions sont de la forme

$$P_1(k) + P_{-1}(k)(-1)^k + P_i(k)i^k + P_{-i}(k)(-i)^k + P_j(k)j^k + P_{j^2}(k)j^{2k}$$

où les  $P_\xi$  sont des polynômes de degré strictement majoré par la valuation de  $z - \xi$  dans le dénominateur de la fonction génératrice (voir par exemple [20, Theorem 4.4.1]). Ces polynômes sont facilement déterminés par le début du développement des séries génératrices. On a utilisé PARI/GP pour nos calculs [21].  $\square$

À partir des formules du théorème 51, on peut avoir des formules polynomiales à coefficients rationnels dans chaque classe du poids modulo 12. De telles formules permettent d'obtenir des expressions « compactes » des dimensions semblables à l'égalité (28) de la proposition 9, par exemple

$$d_S^{0,\infty}(k) = \left\| \frac{1}{144} \left( k^3 + 15k^2 + \begin{cases} 72k + 144 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 63k + 65 & \text{sinon} \end{cases} \right) \right\|.$$

Une telle formule est cependant assez artificielle, notamment parce qu'elle n'est pas unique dans sa forme. On a aussi par exemple

$$d_S^{0,\infty}(k) = \left\| \frac{k+3}{144} \begin{cases} (k+6)^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k+3)(k+9) & \text{sinon} \end{cases} \right\|.$$

#### RÉFÉRENCES

- [1] George E. ANDREWS : A note on partitions and triangles with integer sides. *Am. Math. Mon.*, 86:477–478, 1979.
- [2] Pierre BIELIAVSKY, Xiang TANG et Yijun YAO : Rankin-Cohen brackets and formal quantization. *Adv. Math.*, 212(1): 293–314, 2007.
- [3] Donald J. BINDNER et Martin ERICKSON : Alcuin's sequence. *Am. Math. Mon.*, 119(2):115–121, 2012.
- [4] Pierre CHAROLLOIS et Robert SCZECH : Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker : an update. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, 101:8–14, 2016.
- [5] Youngju CHOI, François DUMAS, François MARTIN et Emmanuel ROYER : A derivation on Jacobi forms : Oberdieck derivation. Disponible sur le serveur d'archive Hal : <https://hal.science/hal-03132764>, février 2021.
- [6] Youngju CHOI, François DUMAS, François MARTIN et Emmanuel ROYER : Formal deformations of the algebra of Jacobi forms and Rankin-Cohen brackets. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 359(4):505–521, 2021.
- [7] Martin EICHLER et Don ZAGIER : *The theory of Jacobi forms*, volume 55 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [8] Jack FOGLIASSO : Partial derivatives of Jacobi forms. 35th Automorphic Forms Workshop Louisiana State University, 2023.
- [9] Eberhard FREITAG et Rolf BUSAM : *Complex analysis*. Universitext. Berlin : Springer, 2009. 2nd ed.
- [10] OEIS FOUNDATION INC. : Alcuin's sequence : expansion of  $x^3 / ((1-x^2) * (1-x^3) * (1-x^4))$ . Entry A005044 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2024. <https://oeis.org/A005044>.
- [11] J. H. JORDAN, Ray WALCH et R. J. WISNER : Triangles with integer sides. *Am. Math. Mon.*, 86:686–689, 1979.
- [12] Camille LAURENT-GENGOUX, Anne PICHÉREAU et Pol VANHAECKE : *Poisson structures*, volume 347 de *Grundlehren Math. Wiss.* Berlin : Springer, 2012.
- [13] Anatoly LIBGOBER : Elliptic genera, real algebraic varieties and quasi-Jacobi forms. *In Topology of stratified spaces. Based on lectures given at the workshop, Berkeley, CA, USA, September 8–12, 2008*, pages 95–120. Cambridge : Cambridge University Press, 2011.
- [14] François MARTIN et Emmanuel ROYER : Modular forms and periods. *In Formes modulaires et transcendance. Colloque jeunes*, pages 1–117. Paris : Société Mathématique de France, 2005.
- [15] Georg OBERDIECK : A Serre derivative for even weight Jacobi Forms, 2014. <https://arxiv.org/abs/1209.5628>.
- [16] René OLIVETTO : On the Fourier coefficients of meromorphic Jacobi forms. *Int. J. Number Theory*, 10(6):1519–1540, 2014.
- [17] Peter J. OLVER : *Classical invariant theory*, volume 44 de *Lond. Math. Soc. Stud. Texts*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [18] Emmanuel ROYER : Quasimodular forms : an introduction. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 19(2):297–306, 2012.
- [19] Jean-Pierre SERRE : *Cours d'arithmétique*, volume No. 2 de *Le Mathématicien*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée.
- [20] Richard P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 1.*, volume 49 de *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. édition, 2012.
- [21] The PARI Group, Univ. Bordeaux. *PARI/GP version 2.17.0*, 2024. available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [22] Jan-Willem van ITTERSUM, Georg OBERDIECK et Aaron PIXTON : Gromov-Witten theory of K3 surfaces and a Kaneko-Zagier equation for Jacobi forms. *Selecta Math. (N.S.)*, 27(4):Paper No. 64, 30, 2021.
- [23] Jan-Willem M. van ITTERSUM : The Bloch-Okounkov theorem for congruence subgroups and Taylor coefficients of quasi-Jacobi forms. *Res. Math. Sci.*, 10(1):45, 2023. Id/No 5.
- [24] André WEIL : *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Class. Math. Berlin : Springer, 1999. Reprint of the 1976 edition.
- [25] Don ZAGIER : Modular forms and differential operators. volume 104, pages 57–75. 1994. K. G. Ramanathan memorial issue.
- [26] Don ZAGIER : Elliptic modular forms and their applications. *In The 1-2-3 of modular forms. Lectures at a summer school in Nordfjordeid, Norway, June 2004*, pages 1–103. Berlin : Springer, 2008.
- [27] Jie ZHOU : Poisson structures in theories of modular forms, elliptic functions, and invariant theory. Dynamics in Siberia 2017 Conference, [http://old.math.nsc.ru/conference/ds/2017/talks/talk\\_by\\_Zhou.pdf](http://old.math.nsc.ru/conference/ds/2017/talks/talk_by_Zhou.pdf).

FRANÇOIS DUMAS, UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE – CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL –  
UMR6620, F-63000 CLERMONT-FERRAND, FRANCE  
*Email address:* francois.dumas@uca.fr

FRANÇOIS MARTIN, UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE – CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL –  
UMR6620, F-63000 CLERMONT-FERRAND, FRANCE  
*Email address:* francois.martin@uca.fr

EMMANUEL ROYER, UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE – CNRS – WOLFGANG PAULI INSTITUTE, INSTITUT CNRS PAULI –  
IRL2842, A-1090 WIEN, AUTRICHE

EMMANUEL ROYER, CNRS – UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL CRM – CNRS, IRL3457, MONTRÉAL, CANADA  
*Email address:* emmanuel.royer@math.cnrs.fr