

Le laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand

Emmanuel Royer
Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620
Université Blaise Pascal & CNRS
emmanuel.royer@math.univ-bpclermont.fr

Carte d'identité

Le laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand est l'unité mixte de recherche dédiée à la recherche mathématique en Auvergne. Il a deux tutelles, le Centre national de la recherche scientifique (CNRS) et l'université Blaise Pascal. Sa mission principale est la production de nouveau savoir en mathématiques, tant fondamentales qu'appliquées. Le laboratoire se compose de 91 membres : 58 enseignants-chercheurs (24 professeurs des universités et 34 maîtres de conférences), 3 chargés de recherches, 23 chercheurs non permanents et 7 personnels de soutien administratif et technique. Les missions des membres du laboratoire comprennent outre la recherche, l'enseignement et la diffusion de la culture scientifique. Dans ce texte, nous ne développons donc qu'une des facettes des activités en nous focalisant sur la recherche.

La qualité de l'école mathématique française est reconnue dans le monde. Cette qualité repose sur de nombreux échanges entre mathématiciens de tous les pays. Le laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand participe à cet important mouvement de partage du savoir. Il accueille de nombreux mathématiciens étrangers et forme des docteurs ayant reçu leur formation initiale en dehors de la France. Les échanges sont nombreux et réguliers avec les universités et centres de recherches d'autres pays (États-Unis, Canada, Argentine, Chili, Mali, Algérie, Maroc, Tunisie, Russie, Inde, Chine, Hong-Kong, Singapour pour ne citer que les pays extra-européens les plus visités). Le laboratoire est membre fondateur du laboratoire Euro-Maghrébin de mathématiques et de leurs interactions qui a pour objectif de dynamiser la coopération franco-maghrébine en mathématiques. Le laboratoire organise depuis 1971 une école d'été à Saint-Flour. Cette école accueille chaque année une centaine de participants venus assister aux cours donnés par les plus prestigieux conférenciers.

Le laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand héberge aussi trois groupements de recherche du CNRS. Le groupement de recherche *Analyse fonctionnelle, harmonique et probabilités* dirigé par Frédéric Bayart a but pour de fédérer les différentes équipes françaises travaillant autour de l'analyse fonctionnelle, de l'analyse harmonique, et de leurs interactions avec les probabilités. Le groupement de recherche *Structuration de la théorie des nombres* dirigé par Emmanuel Royer a pour but de favoriser un développement de qualité de la théorie des nombres en privilégiant une approche fédératrice de la discipline. Enfin, le groupement de recherche *Normalisation*, dirigé par Dominique Manchon, a pour mission de coordonner divers groupes et équipes de recherche en France qui travaillent sur différents aspects de la renormalisation ou sur des sujets connexes (la normalisation est un thème à la frontière de plusieurs domaines des mathématiques et de la physique fondamentale). Un membre du laboratoire est membre de l'Institut universitaire de France. Le laboratoire porte trois projets de l'Agence nationale de la recherche et ses membres participent à de nombreux projets portés par d'autres laboratoires.

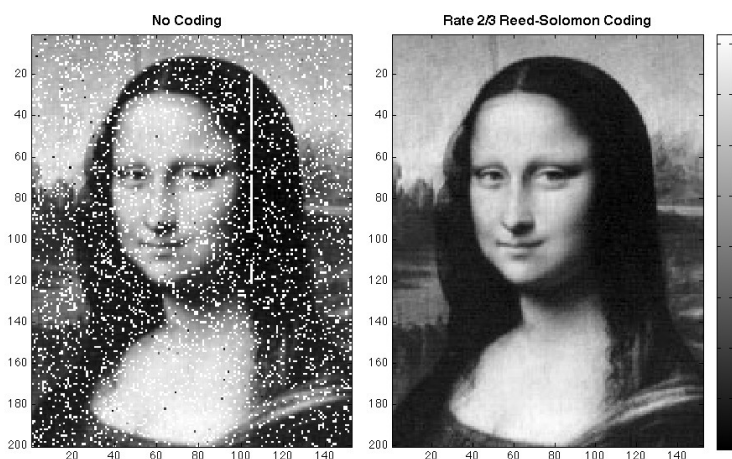
Le laboratoire est membre de la *Fédération de recherches en mathématiques Rhône Alpes Auvergne*. Cette fédération regroupe tous les laboratoires de mathématiques des régions Rhône-Alpes et Auvergne. Créée en 2013, à l'initiative des directeurs des laboratoires et avec le soutien du CNRS, cette structure fédérative est le reflet d'une communauté forte et nombreuse représentant les mathématiques de tout spectre : de la théorie pure aux mathématiques industrielles. Le laboratoire de mathématiques développe aussi des interactions avec le milieu économique local et avec d'autres laboratoires de l'université, notamment au sein des Laboratoires d'excellence (Labex) *ClerVolc* et *IMobS3* mais aussi avec des entreprises telles que EDF, Limagrain... Des membres du laboratoire mènent des recherches en lien avec la médecine, en particulier au sein du projet *Do Well B. : Design Of Well Being monitoring systems*, qui a pour but la création d'un

système de suivi personnel de la santé, pour la détection précoce de troubles comportementaux chez les personnes atteintes de troubles du spectre autistique. La région Auvergne soutient le laboratoire via quatre contrats associés au Fond européen de développement régional (deux contrats sont des études en lien avec des entreprises locales, un contrat porte sur les aspects mathématiques des écoulements de fluides tels que le sang, l'huile ou la boue et un contrat porte sur l'étude des équations diophantiennes).

Le laboratoire héberge une bibliothèque de mathématiques de plus de 15 000 ouvrages et édite une revue internationale à comité de lecture international, les Annales mathématiques Blaise Pascal. L'histoire du laboratoire sous sa forme actuelle est relativement récente puisqu'il a été créé 2004 par la fusion d'un laboratoire de mathématiques appliquées et d'un laboratoire de mathématiques appliquées. Successivement dirigé par Youcef Amirat et Michael Heusener il est cependant le prolongement d'une longue histoire des mathématiques à l'université de Clermont-Ferrand. La première chaire de mathématiques y fut créée en 1854 et tenue alors par Justin Bourget.

Quelles mathématiques à Clermont-Ferrand ?

Les mathématiciens ont pour objectif de poursuivre la construction de l'édifice remarquablement cohérent de la science mathématique. Cohérent, certes, mais certainement pas terminé. Inlassablement, le chercheur en mathématiques répond à des questions de prime abord gratuites. Les réponses, bien souvent, ouvrent la porte à des questions que personne ne s'était posées. L'apparente gratuité des questions auxquelles les chercheurs apportent des réponses leur garantit une très grande généralité. Dans sa notice nécrologique¹ du mathématicien Abel Étienne Louis Transon (1805-1876), l'inspecteur général des mines, Louis-Marcellin Tournaire écrit « [d]ès que les mathématiciens ont substitué dans leurs recherches des notations générales et abstraites aux grandeurs concrètes et aux opérations de l'arithmétique, les formules que leur ont données les calculs effectués sur ces symboles se sont trouvées plus compréhensives et plus vastes que les problèmes posés. » Il est intéressant de noter que ce sont là les propos non d'un mathématicien mais d'un ingénieur des mines qui dirigea le contrôle des chemins de fer de l'État puis l'inspection de la division minéralogique du Centre. Une même notion mathématique trouve donc



des applications dans divers domaines qui a priori n'ont rien à voir entre eux. L'étude des équations aux dérivées partielles permet par exemple de comprendre la propagation d'ondes sismiques ou bien le trafic automobile dans les villes. Un corps fini est un objet mathématique un peu étrange, dans lequel on peut avoir des égalités telles que $2^{5076179} = 1$. Comme dans « la vraie vie », le nombre $2^{5076179}$ a 1 528 083 chiffres, on peut se demander si cet étrange corps fini a une quelconque utilité. Évariste Galois qui a beau-

coup étudié ces corps finis avant de mourir en duel « victime d'une infâme coquette » ne les a pas étudié pour la richesse de leurs applications. Pourtant, près de 150 ans plus tard, Reed et Solomon ont inventé un algorithme qui permet de détecter et corriger les pertes d'informations lors de la transmission d'information. Cet algorithme est utilisé à chaque fois que vous écoutez de la musique ou regardez un film par internet. Il permet aussi de reconstituer des images transmises à grande distance par Laser. La traversée de l'atmosphère par de tels signaux est par exemple source de beaucoup de perte d'informations. La remarquable efficacité de cet algorithme est visible sur l'image ci-contre. Elle représente une image de *La Joconde* transmise

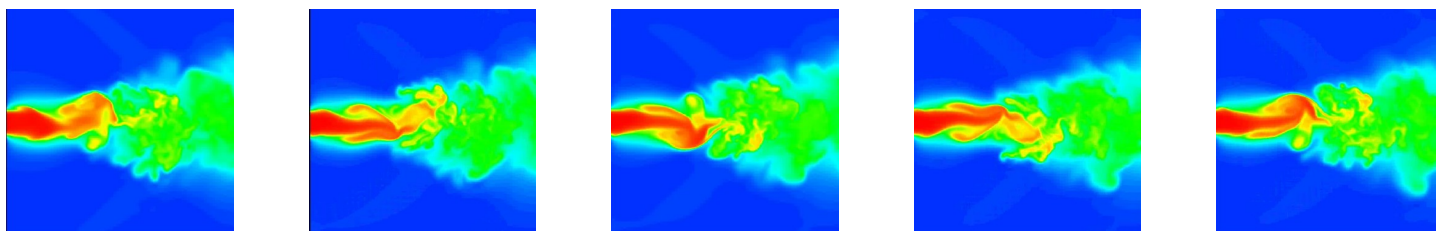
¹ Annales des Mines, 7e série vol. 14, 1878.

par Laser de la Terre à la Lune². L'image de gauche est celle reçue, celle de droite est l'image corrigée.

L'étude théorique permet de comprendre des paradoxes. Dans les années 1960, de gigantesques embouteillages sont apparus dans la ville allemande de Stuttgart après l'ouverture de nouvelles voies supposées fluidifier la circulation. La situation s'est améliorée après fermeture de certains de ces nouveaux axes ; ce paradoxe a été expliqué par le mathématicien Dietrich Braess. D'autres paradoxes engagent le mathématicien à affiner les modèles qu'il utilise pour décrire le monde réel. Les équations décrivant les écoulements des gaz sont utilisées couramment pour prédire le comportements de grands édifices soumis au vent, tels que les gratte-ciel. Cependant, la description des solutions de ces équations est loin d'être acquise. Un paradoxe est révélateur : le paradoxe de Scheffer-Schnirelman selon lequel parmi les solutions des équations décrivant les écoulements de gaz, l'une d'elle permet qu'un fluide peut brusquement s'agiter, sans qu'aucune force extérieure ne lui ait été appliquée³.

Le laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand, couvre avec quatre équipes un large spectre mathématique.

L'équipe *Équations aux dérivées partielles et analyse numérique*, dirigée par Rachid Touzani, est une équipe de mathématiques appliquées. L'objectif de cette équipe est d'étudier les équations qui modélisent le monde. Ces équations comprennent celle évoquées à propos des écoulements des gaz. L'étude est à la fois théorique et appliquée. Cette équipe a à sa disposition les moyens informatiques importants du laboratoire, avec notamment un cluster de 256 cœurs permettant le calcul parallèle. Ces moyens permettent par exemple d'étudier les mouvements d'un très grand nombre de particules de petites tailles s'écoulant sur la pente d'un volcan. Les méthodes développées par des membres de l'équipe permettent par exemple de comprendre ce qui se passe lorsqu'on injecte un gaz plasmagène (argon-hydrogène) chauffé à 12 000 K avec une vitesse de 1 600 m/s dans un milieu ambiant « froid » de l'air à 300 K. La figure ci-dessous montre l'évolution de la température dans le milieu.

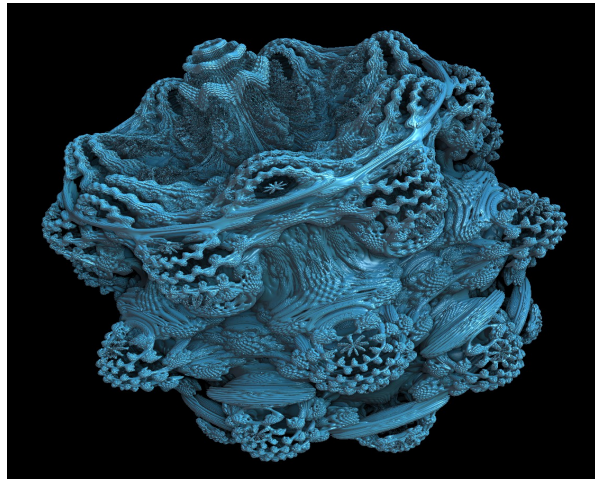


L'équipe *Probabilités, analyse et statistiques* dirigée par Frédéric Bayart est une équipe de mathématiques fondamentales et appliquées. L'un de ses thèmes d'études dans le domaine des mathématiques fondamentales est la compréhension des fractales. Si les fractales ont vu le jour pour répondre à des questions *a priori* internes aux mathématiques (liées aux notions de surfaces, de dimension voire de nombre d'éléments d'un ensemble), il est intéressant de noter que la théorie des fractales a donné naissance à une technique de compression d'images. Un autre thème de mathématiques fondamentales étudié par l'équipe est le chaos. Il s'agit d'étudier les conséquences du changement des conditions initiales d'un système en évolution. Le lien avec les mathématiques appliquées est établi par les probabilistes. Les outils fondamentaux qu'ils étudient permettent en particulier de développer les outils des statistiques. Les méthodes développées au sein de l'équipe permettent par exemple de localiser les intrus dans des réseaux de distribution d'eau, mais aussi de prévoir les répartitions des dépôts d'un nuage volcanique, de déterminer la production annuelle d'un champs d'éoliennes, de détecter les signes précurseurs

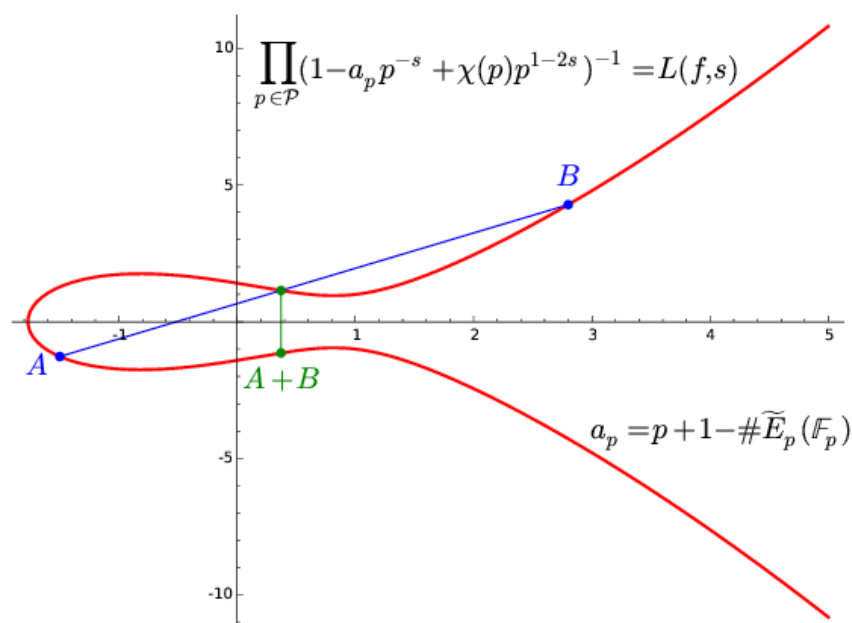
² Image : Xiaoli Sun, NASA Goddard.

³ Le lecteur intéressé trouvera quantité d'autres exemples fascinants sur le site *Images des mathématiques*.

de crise chez des enfants autistes ou d'estimer l'abondance de tiques dans un milieu en fonction de données environnementales.



L'équipe *Théorie des nombres*, dirigée par Éric Gaudron est une équipe de mathématiques fondamentales. Au départ étude des propriétés des nombres entiers, cette branche des mathématiques est devenue l'étude de questions issues « naturellement » de l'étude des entiers. Sont en particulier étudiées dans l'équipe la théorie analytique des nombres et la géométrie algébrique. La théorie analytique des nombres s'est spécialisée dans l'usage de l'analyse (réelle et complexe) pour résoudre des problèmes issus de l'étude de la répartition de suites particulières de nombres entiers. L'exemple typique est l'étude de la suite infinie des nombres premiers. Si l'étude des nombres premiers peut sembler gratuite, savoir que l'algorithme RSA de cryptage (utilisé pour transmettre confidentiellement la majorité des informations sur internet) est basé sur les propriétés des nombres premiers infirme immédiatement cette première impression. La géométrie arithmétique s'inspire elle de méthodes issues de la géométrie pour étudier les nombres. La très célèbre conjecture de Fermat⁴ a par exemple été démontrée par Wiles & Taylor en utilisant de très délicates propriétés des courbes elliptiques (dont un exemple est reproduit ci-dessous illustrant l'une des propriétés des courbes elliptiques : la possibilité d'additionner ses points). On notera au passage que la théorie des nombres est une branche qui cherche dans les autres branches des mathématiques toutes les méthodes utiles à la résolution des problèmes qu'elle se pose.



4 Si n est un entier strictement supérieur à 2, il n'existe pas de nombres entiers non nuls x , y et z tels que : $x^n + y^n = z^n$.

L'équipe *Géométrie, algèbre et algèbre d'opérateurs*, dirigée par Julien Bichon est une équipe de mathématiques fondamentales. Parmi les objets d'étude de cette équipe, les structures non commutatives tiennent une bonne place, que ce soit au travers de l'algèbre non commutative, ou de son approche géométrique qu'est la géométrie non commutative. La commutativité s'écrit $AB=BA$. Par exemple $2 \times 3 = 3 \times 2$. Cette propriété semble si naturelle que nous ne la mettons pas en cause. On peut cependant effectuer des opérations sur d'autres objets que des nombres. La courbe ci-dessus montre par exemple un exemple d'addition de deux points A et B . On peut aussi additionner des branches pour former des arbres comme ci-dessous. Questionner la commutativité de ces nouvelles opérations ouvre la porte de fascinants mondes où un produit AB n'est pas nécessairement égal à BA . Les situations où $AB-BA=1$ par exemple formalisent certaines lois de la physique des particules (comme le remarquèrent déjà Planck et Heisenberg au début du XXIème siècle). Celles où $AB=qBA$ pour certaines constantes q interviennent dans des théories aux frontières entre les mathématiques fondamentales et la physique quantique. Ces exemples illustrent des domaines de recherche, qui poussés à un haut niveau d'abstraction, sont étudiés dans l'équipe *Géométrie, algèbre et algèbres d'opérateurs*.

